Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 9**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

31. Seien $\mu, a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung. Zeige mit Hilfe der Itô-Formel, dass $r_t := a\exp\left\{t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma B_t\right\}$ die Gleichung $r_t = a + \int_0^t \mu r_s ds + \int_0^t \sigma r_s dB_s$ löst.

32. Seien $\mu, a \in \mathbb{R}$, $\theta, \sigma > 0$ und $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung. Löse mit Hilfe der Itô-Formel die Gleichung $r_t = a + \int_0^t \theta(\mu - r_s)ds + \int_0^t \sigma dB_s$.

33. Seien nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $(B_t)_{t\geq 0}$ eine n-dimensionale standard Brownsche Bewegung. Beweise mit Hilfe der Itô-Formel, dass
$$f(B_t) = f(B_0) + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)ds + \int_0^t \nabla f(B_s)dB_s,$$
wobei Δ und ∇ den Laplace- bzw. Nabla-Operator darstellen.

34. (Tanaka-Formel) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung. Da $g(x) = |x|$ nicht zweimal stetig differenzierbar in 0 ist, darf die Itô-Formel für g nicht verwendet werden. Daher modifiziert man g nahe 0 wie folgt:
$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| & \text{if } |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon}\right) & \text{if } |x| < \varepsilon \end{cases}$$
wobei $\varepsilon > 0$ ist.

    a) Bezeichne λ das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$. Zeige, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt
    $$g_\varepsilon(B_t) = g_\varepsilon(B_0) + \int_0^t g'_\varepsilon(B_s)dB_s + \frac{1}{2\varepsilon}\lambda(\{s \in [0,t] : B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}),\ t \geq 0.$$

    b) Zeige mit Hilfe der Itô-Isometrie, dass
    $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g'_\varepsilon(B_s)\mathbb{1}_{B_s\in(-\varepsilon,\varepsilon)}dB_s = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \frac{B_s}{\varepsilon}\mathbb{1}_{B_s\in(-\varepsilon,\varepsilon)}dB_s = 0,\ t \geq 0,$$
    wobei der Grenzwert im $L^2(\mathbb{P})$-Sinne gebildet wird.

    c) Zeige damit durch $\varepsilon \to 0$ die sogenannte Tanaka-Formel
    $$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)dB_s + L_t,\ t \geq 0.$$
    Hier bezeichnet $(L_t)_{t\geq 0}$ die *lokale Zeit der Brownschen Bewegung bei 0*,
    $$L_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\lambda(\{s \in [0,t] : B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}),$$
    wobei der Limes im $L^2(\mathbb{P})$-Sinne existiert, und sign die Vorzeichenfunktion.