Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 8**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

Im Folgenden ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung und $T > 0$.

26. Zeige, dass das Itô-Integral für Prozesse $f \in W_{\mathbb{F}}([0,T])$ unabhängig von der Wahl der lokalisierenden Folge ist.

27. a) Es seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\left(\sigma_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ Folgen mit $\mu_n \to \mu$ und $\sigma_n^2 \to \sigma^2$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \geq 0$. Weiters seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathcal{N}\left(\mu_n, \sigma_n^2\right)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ für eine Zufallsvariable X. Zeige, dass $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

    b) Sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetige, deterministische Funktion. Beweise, dass für jedes $t \geq 0$ das stochastische Integral $\int_0^t h(s)dB_s$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^t h(s)^2 ds$ ist.

28. Beweise wie in Beispiel 19., aber nun mit Hilfe der Itô-Formel, dass

    a) $\int_0^T t dB_t = TB_T - \int_0^T B_t dt$,

    b) $\int_0^T B_t^2 dB_t = \frac{1}{3}B_T^3 - \int_0^T B_t dt$.

29. Sei $X \in V_{\mathbb{F}}([0,T])$. Definiere

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t X_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds\right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

    Zeige mit Hilfe der Itô-Formel, dass $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s X_s dB_s$ gilt und $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal ist, sofern $(Z_t X_t)_{t\in[0,T]} \in V_{\mathbb{F}}([0,T])$ vorausgesetzt wird.

30. Sei $X_t = \int_0^t v_s dB_s$, $0 \leq t \leq T$, wobei $v \in V_{\mathbb{F}}([0,T])$. Zeige, dass der durch

$$M_t = X_t^2 - \int_0^t v_s^2 ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

    definierte Prozess ein Martingal ist, wenn v beschränkt ist.