Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 7**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

Im Folgenden ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung und $T > 0$.

24. Zeige für $C > 0$ die Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} B_t \geq C\right) \leq e^{-\frac{C^2}{2T}}.$$

Hinweis: Beweise zunächst, dass $(e^{\lambda B_s})_{s\geq 0}$ für $\lambda \geq 0$ ein Submartingal ist, und wende die Doob'sche Ungleichung an.

25. Sei $f \in V_{\mathbb{F}}([0,T])$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Das (λ)-Integral ist definiert durch

$$(\lambda)\int_0^T f(t,\omega)dB_t(\omega) := \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j f(\xi_j,\omega)\Delta B_j, \quad \text{wobei} \quad \xi_j = (1-\lambda)t_j + \lambda t_{j+1},$$

sofern der $L^2(\mathbb{P})$-Grenzwert existiert. Zeige, dass das (λ)-Integral alternativ auch als $L^2(\mathbb{P})$-Grenzwert von

$$\lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j \left((1-\lambda)f(t_j,\omega) + \lambda f(t_{j+1},\omega)\right)\Delta B_j$$

berechnet werden kann, wenn f stetig differenzierbare Pfade hat.
Hinweis: Zeige $f(\xi_j,\omega) = (1-\lambda)f(t_j,\omega) + \lambda f(t_{j+1},\omega) + \mathcal{O}(|t_{j+1}-t_j|)$.