Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 6**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

Im Folgenden ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung und $T > 0$.

21. Zeige, dass die folgenden stochastischen Prozesse $(M_t)_{t\geq 0}$ Martingale bezüglich der von der Brownschen Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ erzeugten Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sind:

    a) $M_t = B_t^2 - t$,
    b) $M_t = B_t^3 - 3tB_t$,
    c) $M_t = e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

22. a) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein reellwertiger, quadratmittelstetiger Prozess, d.h. für jedes $t \geq 0$ gelten $E[X_t^2] < \infty$ und
$$\lim_{s\to t} E[(X_t - X_s)^2] = 0.$$
Zeige, dass die Funktion $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definiert durch $m(t) := E[X_t^2]$ stetig ist.

    b) Beweise, dass $(B_t)_{t\geq 0}$ quadratmittelstetig ist.

    c) Nun sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Zeige, dass der durch $Y_t := f(B_t)$ definierte Prozess $(Y_t)_{t\geq 0}$ quadratmittelstetig ist.

    d) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein reellwertiger, progressiv messbarer, quadratmittelstetiger Prozess. Zeige, dass
$$E\left[\int_0^T X_t^2 dt\right] < \infty,$$
der stochastische Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ also bezüglich der Brownschen Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ auf $[0, T]$ integrierbar ist.

    e) Weiters sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen $\tau_n = \left\{0 = t_0^n < \cdots < t_{k(n)+1}^n = T\right\}$ des Intervalls $[0, T]$. Wir nehmen an, dass die Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist, d.h. $\tau_n \subset \tau_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, und dass die Feinheit von τ_n gegen 0 konvergiert, also $\sup_{i=0,\ldots,k(n)} \left|t_{i+1}^n - t_i^n\right| \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass
$$\sum_{i=0}^{k(n)} X_{t_i^n}(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}) \overset{L_2}{\to} \int_0^T X_t dB_t \quad \text{für } n \to \infty.$$

23. Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein rechts-stetiges Martingal. Beweise, dass

    a) $E\left[(\sup_{t\in[0,T]} \|M_t\|)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[\|M_T\|^p\right]$ für $p > 1$,
    b) $\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]} \|M_t\| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} E\left[\|M_T\|^p\right]$ für $p \geq 1$ und $\lambda > 0$.

    Hinweis zu a): Für $p > 0$ und jede nicht-negative reelle Zufallsvariable X gilt $E[X^p] = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(X \geq \lambda)d\lambda$. Benutze diese Identität in Verbindung mit $\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} X_t \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E\left[X_T \mathbb{1}_{\left\{\sup_{t\in[0,T]} X_t \geq \lambda\right\}}\right]$ für $\lambda > 0$ und jedes rechts-stetige Submartingal $(X_t)_{t\geq 0}$.