Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 5**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

Im Folgenden ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung und $T > 0$.

18. Sei $f \in V_{\mathbb{F}}([0,T])$.

    a) Zeige, dass das Itô-Integral nicht von der Wahl der die Funktion f approximierenden Folge abhängt.

    b) Beweise die Itô-Isometrie $E[(\int_0^T f(t,.)dB_t)^2] = E[\int_0^T f(t,.)^2 dt]$.

19. Zeige direkt anhand der Definition des Itô-Integrals

    a) $\int_0^T t dB_t = TB_T - \int_0^T B_t dt$,

    b) $\int_0^T B_t^2 dB_t = \frac{1}{3}B_T^3 - \int_0^T B_t dt$.

20. Sei $f \in V_{\mathbb{F}}([0,T])$ und $t \mapsto f(t,\omega)$ stetig für fast alle ω. Das *Stratonovich-Integral* von f ist definiert als

$$\int_0^T f(t,\omega) \circ dB_t(\omega) := L^2 - \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j f(t_j^*,\omega)\Delta B_j, \quad \text{wobei} \;\; t_j^* = \frac{1}{2}(t_j + t_{j+1}),$$

sofern der $L^2(\mathbb{P})$-Grenzwert existiert.

    a) Zeige mit Hilfe obiger Definition, dass $\int_0^T B_t \circ dB_t = \frac{1}{2}B_T^2$.

    b) Angenommen für f existieren $K < \infty$ und $\varepsilon > 0$, sodass $E[|f(s,.) - f(t,.)|^2] \leq K\,|s-t|^{1+\varepsilon}$ für $0 \leq s,t \leq T$. Zeige, dass dann

$$\int_0^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = L^1 - \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j f(t_j',\omega)\Delta B_j$$

für jede Wahl von $t_j' \in [t_j, t_{j+1}]$. Insbesondere stimmen das Itô-Integral und das Stratonovich-Integral überein.
Hinweis: Zeige $E[|\sum_j f(t_j,\omega)\Delta B_j - \sum_j f(t_j',\omega)\Delta B_j|] \to 0$ für $\Delta t_j \to 0$.