Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

**H. Kazianka** **Blatt 4**

# Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

Konvention: Brownsche Bewegungen haben stetige Pfade.

15. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung und $t_k^n := t \wedge (k2^{-n})$ für $t \geq 0$ und $n, k \in \mathbb{N}$. Zeige

    a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 1} (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 = t$ $\mathbb{P}$-fast sicher,

    b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 1} \left| B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right| = \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

16. (Brownsche Brücke) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine $d$-dimensionale standard Brownsche Bewegung ($d \in \mathbb{N}$). Definiere den Prozess $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ durch $X_t := B_t + t/T(a - B_T)$ für $T > 0$ und $a \in \mathbb{R}^d$. Zeige, dass $X$ ein stetiger Gauß'scher Prozess ist und $E[X_t] = \frac{at}{T}$ sowie $Cov[X_t, X_s] = ((s \wedge t) - st/T)I_d$ gilt für $s, t \in [0, T]$.

17. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ und $I = [0, T]$, $T > 0$, ein Intervall. Weiters sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung bezüglich $\mathbb{P}$ und $\mathbb{F}$. Beweise die folgenden Aussagen über das Itô-Integral für einfache Funktionen $f \in W_{\mathbb{F}}(I)$.

    - Das Itô-Integral ist unabhängig von der Darstellung der einfachen Funktion $f$.
    - Das Itô-Integral ist linear.
    - $\int_0^S f dB_t$ ist stetig bezüglich $S \leq T$.
    - $E[\int_0^T f dB_t] = 0$.
    - $\int_0^S f dB_t$ ist $\mathcal{F}_S$-meßbar für $S \leq T$.