Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 3**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

11. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale standard Brownsche Bewegung ($d \in \mathbb{N}$).

    a) Beweise, dass $\operatorname{Cov}(B_t, B_s) = \min\{t, s\}\, I_d$ für alle $t, s \geq 0$.

    b) Zeige, dass für jedes $t_0 \geq 0$ der Prozess $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ definiert durch
    $$\tilde{B}_t := B_{t_0+t} - B_{t_0}, \quad t \geq 0$$
    eine von B_{t_0} unabhängige Brownsche Bewegung ist.

    c) Zeige, dass für jede Konstante $c \neq 0$ der Prozess $(\hat{B}_t)_{t\geq 0}$ definiert durch
    $$\hat{B}_t := cB_{\frac{t}{c^2}}, \quad t \geq 0$$
    eine Brownsche Bewegung ist.

12. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung.

    a) Zeige, dass die Menge
    $$N := \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{c=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{n-3} \bigcap_{k=i+1}^{i+3} \left\{ \left| B_{M\frac{k}{n}} - B_{M\frac{k-1}{n}} \right| \leq \frac{c}{n} \right\}$$
    meßbar ist und $\mathbb{P}(N) = 0$ gilt.

    b) Folgere, dass die Pfade von $(B_t)_{t\geq 0}$ fast sicher nirgendwo differenzierbar sind.

13. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale standard Brownsche Bewegung ($d \in \mathbb{N}$). Zeige, dass auch $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ definiert durch
    $$\tilde{B}_t := \begin{cases} tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$
    eine Brownsche Bewegung ist.

14. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale standard Brownsche Bewegung. Zeige, dass
    $$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} B_t = +\infty, \ \inf_{t\geq 0} B_t = -\infty \right) = 1.$$
    Hinweis: Schließe zuerst mit Aufgabe 11c), dass die Verteilung von $Z := \sup_{t\geq 0} B_t$ auf der Menge $\{0, \infty\}$ konzentriert ist und zeige dann, dass $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$ ist, indem Aufgabe 11b) und die Unabhängigkeit der Zuwächse verwendet wird.