Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 2**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

6. Seien X und Y zwei stochastisch unabhängige standard normalverteilte Zufallsvariablen, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Berechne die Dichte der Zufallsvariable $\frac{X}{Y}$.

7. Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig und besitzen die Dichten
$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| \leq 1) \quad \text{und} \quad f_Y(y) = ye^{-\frac{y^2}{2}} \quad (y \geq 0).$$
Zeige, dass das Produkt $Z = XY$ standard normalverteilt ist, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

8. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweise die folgenden Aussagen:
   - (Chebyshev-Ungleichung) Für jede reelle Zufallsvariable X und jedes Paar reller Zahlen $p > 0$, $\alpha > 0$ gilt
   $$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^p} E(|X|^p).$$
   - (Borel-Cantelli Lemma) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen, dann gilt
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}) = 0.$$

Definition 1 *Seien $X = (X_t)_{t\in T}$ und $Y = (Y_t)_{t\in T}$ stochastische Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{N} = \{A \subset \Omega \mid \exists B \in \mathcal{F} \text{ mit } A \subset B \text{ und } \mathbb{P}(B) = 0\}$ und T eine beliebige Indexmenge.*

1. *Y heißt Version oder Modifikation von X, falls gilt:*
$$\{X_t \neq Y_t\} \in \mathcal{N} \quad \text{für alle } t \in T.$$
2. *$X \neq Y$ heißen ununterscheidbar oder äquivalent, falls $\bigcup_{t\in T} \{X_t \neq Y_t\} \in \mathcal{N}$.*

9. Seien $X = (X_t)_{t\in T}$ und $Y = (Y_t)_{t\in T}$, $T \subset \mathbb{R}$, stetige Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeige, dass Y eine Version von X ist, genau dann wenn X und Y ununterscheidbar sind.
Hinweis: Für $t \in T \cap \mathbb{Q}$ existiert ein $N_t \in \mathcal{F}$ mit $\{X_t \neq Y_t\} \subset N_t$ und $\mathbb{P}(N_t) = 0$. Zeige $\bigcap_{t\in T\cap\mathbb{Q}} (\Omega \setminus N_t) \subset \bigcap_{t\in T} \{X_t = Y_t\}$.

10. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess auf dem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass für alle $T \in \mathbb{R}^+$ der Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ eine $\mathbb{P}$-f.s. stetige Version besitzt. Zeige, dass dann $(X_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version besitzt.
Hinweis: Sei $X^{(n)}$ eine $\mathbb{P}$-f.s. stetige Version von $(X_t)_{t\in[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $t \geq 0$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit $t \in [n-1, n)$. Mit diesem n setze $\tilde{X}_t := X_t^{(n)}$ und zeige, dass $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig ist.