Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 12**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

44. (Bedingte Itô-Isometrie) Seien $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration mit den üblichen Bedingungen, $\tau_1 \leq \tau_2$ beschränkte $\mathbb{F}$-Stoppzeiten und $f \in V_{\mathbb{F}}([0,\infty))$.

    a) Verwende das Optional Sampling Theorem um zu zeigen, dass $\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t \in L^2(\mathbb{P})$ und $E[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = 0$ ist.
    Optional Sampling Theorem: Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges $\mathbb{F}$-Submartingal und $\sigma \leq \tau$ seien beschränkte $\mathbb{F}$-Stoppzeiten. Dann sind X_σ und X_τ integrierbar und es gilt $X_\sigma \leq E[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma]$. Ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $L^p(\mathbb{P})$-Martingal mit $p \in [1,\infty)$, so sind $X_\sigma, X_\tau \in L^p(\mathbb{P})$ und es gilt $X_\sigma = E[X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma]$.

    b) Sei $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Zeige unter Verwendung von Lemma 2.33 aus der Vorlesung, dass $\mathbb{P}$-f.s. für $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$ gilt

    $$\mathbb{1}_A \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t = \int_0^T \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{[\tau_1,\tau_2)}(t) f(t)dB_t.$$

    c) Folgere aus Aufgabe b), dass bereits $E[\mathbb{1}_A(\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t)^2] = E[\mathbb{1}_A \int_{\tau_1}^{\tau_2} f^2(t)dt]$ für $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ gilt und somit

    $$E[(\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dB_t)^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = E[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f^2(t)dt \mid \mathcal{F}_{\tau_1}].$$

45. Seien $(B_t^{(n)})_{t\geq 0}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ Brown'sche Bewegungen (möglicherweise an unterschiedliche Filtrationen adaptiert), sodass für jedes $t \geq 0$ die Folge $(B_t^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zufallsvariable B_t $\mathbb{P} - f.s.$ konvergiert. Beweise, dass dann $(B_t)_{t\geq 0}$ dieselben endlichdimensionalen Verteilungen wie eine Brown'sche Bewegung besitzt.
Hinweis: Benutze charakteristische Funktionen und zeige für beliebige $d \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_d \geq 0$, dass $\varphi_X = \varphi_{X_n}$ wenn $n \in \mathbb{N}$, $X = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_d})$ und $X_m = (B_{t_1}^{(n)}, \ldots, B_{t_d}^{(n)})$.

46. (Starke Markov-Eigenschaft der Brown'schen Bewegung) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung und $\tau < \infty$ eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit. Zeige, dass dann durch

    $$\tilde{B}_t := B_{\tau+t} - B_\tau, \quad t \geq 0$$

    eine $(\mathcal{F}_{\tau+t})_{t\geq 0}$-adaptierte Brown'sche Bewegung definiert wird.
Hinweis: Betrachte zunächst den Fall einer beschränkten Stoppzeit τ. Zeige mit Hilfe der bedingten Itô-Isometrie (Aufgabe 44), dass $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ die Voraussetzungen des Charakterisierungssatzes von Lévy erfüllt, indem $\tilde{B}_t$ als $\tilde{B}_t = \int_\tau^{\tau+t} 1dB_s$ dargestellt wird. Im Falle einer beliebigen (nicht notwenigerweise beschränkten) endlichen Stoppzeit τ definiere man beschränkte Stoppzeiten $\tau_n := \tau \wedge n$ und $\tilde{B}_t^{(n)} := B_{\tau_n+t} - B_{\tau_n}$. Man argumentiere mit dem Resultat aus Aufgabe 45.

47. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $L^2(\mathbb{P})$-Prozess mit $X_0 = 0$ und $E[X_t] = 0$ für $t \geq 0$. Darüberhinaus habe $(X_t)_{t\geq 0}$ unabhängige Zuwächse und es existiert eine Funktion f mit $E[(X_t - X_s)^2] = f(t-s)$ für alle $t \geq s \geq 0$. Beweise:

   a) $(X_t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal (bezüglich der von $(X_t)_{t\geq 0}$ erzeugten Filtration $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, s \leq t)$).

   b) Es existiert eine Zahl $c \geq 0$, sodass $(X_t^2 - ct)_{t\geq 0}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ ist. Hinweis: Zeige für $f(t) = E[X_t^2] \geq 0$, dass $f(t+s) = f(t) + f(s)$ (Additivität) für $s, t \geq 0$ gilt. Daraus lässt sich $f(t) = ct$ (Homogenität) für $c = f(1)$ und alle $t \in \mathbb{Q}$ folgern. Schließe mit der Monotonie von f, dass $f(t) = ct$ bereits für alle $t \geq 0$ besteht. Damit ergibt sich durch Nulladdition leicht $E[X_t^2 - ct \mid \mathcal{F}_s^X] = X_s^2 - cs$.

   c) Ist weiters $(X_t)_{t\geq 0}$ stetig und $c > 0$, so ist X eine Brown'sche Bewegung mit Varianzparameter c. (Also anstelle von $E[(X_t - X_s)^2] = t - s$ gilt $E[(X_t - X_s)^2] = ct - cs$.)