Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 11**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

39. Sei $\mathbb{F}^{(1)} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ wieder die von der Brown'schen Bewegung erzeugte (... die augmentierte kanonische) Filtration und $T > 0$.

    a) Zeige: Ist Y eine $\mathcal{F}_T$-meßbare, reellwertige Zufallsvariable mit $E[|Y|^2] < \infty$, so ist $M_t := E[Y \mid \mathcal{F}_t]$, $t \in [0,T]$, ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ und es gilt $E[M_t^2] < \infty$.
    b) Finde für die folgenden Zufallsvariablen Y jenen bis auf fast sichere Gleichheit eindeutigen Prozess $f \in V_{\mathbb{F}^{(1)}}([0,T])$, für den gilt
    $$M_t = E[M_0] + \int_0^t f(s)dB_s, \quad t \in [0,T].$$
        i. $Y = B_T^2$.
        ii. $Y = B_T^3$.
        iii. $Y = e^{\sigma B_T}$ wobei $\sigma \in \mathbb{R}$. (Beachte: $(e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t})_{t\geq 0}$ ist ein Martingal.)

Fertigstellung des Beweises von Satz 4.3.

40. Sei $(X_t)_{t\in I}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und I eine beliebige Indexmenge. Bezeichnet $\mathcal{S}$ das System aller endlichen Teilmengen $S \subset I$. Zeige, dass
$$\mathcal{A} := \bigcup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(X_t, t \in S)$$
eine Algebra in Ω ist und $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(X_t, t \in I)$ gilt.

41. Sei $p \in [1,\infty)$ und I eine beliebige Indexmenge. Beweise, dass die lineare Hülle Z aller Funktionen der Form $f_1(X_{t_1})\dots f_n(X_{t_n})$ mit $t_1,\dots,t_n \in I$ und beschränkten, messbaren $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1,\dots,n$ und $n \in \mathbb{N}$, dicht in $L^p(\Omega, \sigma(X_t, t \in I), \mathbb{P})$ liegt.
Hinweis: Benutze den folgenden Satz aus der Maßtheorie: *Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *ein Maßraum und* $p \in [1,\infty)$. *Dann ist*
$$\text{span}\,\{\mathbb{1}_A \mid A \in \mathcal{F}, \mu(A) < \infty\} \tag{1}$$
dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Ist* μ σ*-endlich und* $\mathcal{H}$ *ein Halbring mit* $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{H})$ *so kann* $\mathcal{F}$ *in (1) durch* $\mathcal{H}$ *ersetzt werden.* Betrachte nun die $\sigma(X_t, t \in I)$ erzeugende Algebra $\mathcal{A}$ aus Aufgabe 40. Nach obigem Satz gilt es also zu zeigen, dass zu jedem $A \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon > 0$ ein $F \in Z$ existiert, sodass $\|\mathbb{1}_A - F\|_{L^p(\Omega,\sigma(X_t,t\in I),\mathbb{P})} < \varepsilon$ erfüllt ist. Beachte noch, dass für $A \in \mathcal{A}$ gilt, $A \in \sigma(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ für geeignete $t_1,\dots,t_n \in I$ und $n \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich nämlich für $X = (X_{t_1},\dots,X_{t_n})$, dass ein $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $X^{-1}(B) = A$ und man argumentiert über einen geeigneten die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugenden Halbring.

42. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ eine Sub-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{N}$ das System aller $\mathcal{F}$-Nullmengen. Wie in der Vorlesung bezeichnet $\sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{N})$ die Augmentation von $\mathcal{G}$. Diese bezeichne man mit $\mathcal{G}^* := \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{N})$. $\mathcal{G}^*$ kann mit Hilfe der symmetrischen Differenz Δ (definiert durch $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$) explizit durch $\mathcal{G}^* = \{A \Delta N \mid A \in \mathcal{G}, N \in \mathcal{N}\}$ angegeben werden. Zeige die folgenden Behauptungen:

    a) Seien X ein $\mathcal{G}$-meßbare Zufallsvariable und Y eine $\mathcal{F}$-meßbare Zufallsvariable. Dann gilt
    $$P(X \neq Y) = 0 \Longrightarrow Y \text{ ist } \mathcal{G}^* - \text{meßbar.}$$

    b) Ist $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dann gilt
    $$X \text{ ist } \mathcal{G}^* - \text{meßbar} \Longleftrightarrow E[X \mid \mathcal{G}] = X.$$

    Hinweis: Für die Richtung "$\Longrightarrow$" ist $E[|X - E[X \mid \mathcal{G}]|] = 0$ nachzuweisen. Dazu empfiehlt es sich das Integral in zwei Teile aufzuspalten: $\int_\Omega |X - E[X \mid \mathcal{G}]| \, d\mathbb{P} = \int_{A_+} (X - E[X \mid \mathcal{G}]) d\mathbb{P} + \int_{A_-} (E[X \mid \mathcal{G}] - X) d\mathbb{P}$ wobei $A_+ := \{X - E[X \mid \mathcal{G}] \geq 0\} \in \mathcal{G}^*$ und $A_- := \{X - E[X \mid \mathcal{G}] < 0\} \in \mathcal{G}^*$ gilt. Nutze nun die Darstellung der Mengen aus $\mathcal{G}^*$ mit Hilfe der symmetrischen Differenz.

43. Vervollständige, mit Hilfe der Resultate aus den Aufgaben 41 und 42, den Beweis des Satzes 4.3 aus der Vorlesung: Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dann ist die von der Brown'schen Bewegung erzeugte (... die augmentierte kanonische) Filtration rechtsstetig.
    Hinweis: Zeige zunächst $E[f \mid \mathcal{F}_t] = E[f \mid \mathcal{F}_{t+}]$ für $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_{t+}, \mathbb{P})$ und $t \geq 0$. Benutze danach Lemma 4.2 aus der Vorlesung.