Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 10**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

35. Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ reellwertige Itô-Prozesse. Zeige mit Hilfe der multi-dimensionalen Itô-Formel, dass
$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0 Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t dX_s dY_s.$$

36. Sei $dX_t = u(t)dt + v(t)dB_t$ ein n-dimensionaler Itô-Prozess mit $E[\int_0^t \|u(s)\|\, ds] < \infty$ für $t \geq 0$ und $v \in V_{\mathbb{F}^{(n)}}^{m\times n}([0,\infty))$, wobei $m \geq 1$ und $\mathbb{F}^{(n)}$ die von der Brown'schen Bewegung erzeugte Filtration darstellt. Angenommen X_t ist ein Martingal bezüglich $\mathbb{F}^{(n)}$. Zeige, dass dann $u(s,\omega) = 0$ für fast alle $(s,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$.
Hinweis: Zeige zuerst $E[\int_s^t u(r)dr \mid \mathcal{F}_s^{(n)}] = 0$ für alle $t \geq s$ und folgere $E[u(t) \mid \mathcal{F}_s^{(n)}] = 0$ für alle $t > s$ durch differenzieren. Verwende danach den Martingalkonvergenzsatz aus der Vorlesung für den Grenzübergang $s \nearrow t$.

37. Sei wieder $X_t = u(t)dt + dB_t$ ein reellwertiger Itô-Prozess mit beschränktem Prozess $(u(t))_{t\geq 0}$. Dann ist nach Aufgabe 36 $(X_t)_{t\geq 0}$ im Allgemeinen kein $\mathbb{F}^{(1)}$-Martingal. Zeige, dass jedoch der Prozess $Y_t = X_t M_t$ ein $\mathbb{F}^{(1)}$-Martingal ist, wenn
$$M_t = exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t u(s)^2 ds - \int_0^t u(s) dB_s\right\}$$
als ein spezielles exponentielles Martingal gewählt wird.

38. Finde für die folgenden Funktionen $F \in L^2(\mathbb{F}_T^{(1)})$ jenen bis auf fast sichere Gleichheit eindeutigen Prozess $f \in V_{\mathbb{F}^{(1)}}([0,T])$, für den gilt
$$F = E[F] + \int_0^T f(t) dB_t, \quad T > 0.$$
a) $F = B_T$.
b) $F = \int_0^T B_t dt$.
c) $F = B_T^2$.
d) $F = B_T^3$.

Erholsame Weihnachtsferien und ein erfolgreiches neues Jahr!