Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

H. Kazianka **Blatt 1**

Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis in Finanz- und Versicherungsmathematik 1 (SS 2010)

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $(S, \mathcal{S})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{N} = \{A \subset \Omega \mid \exists B \in \mathcal{F} \text{ mit } A \subset B \text{ und } \mathbb{P}(B) = 0\}$.
   a) Sind $X, Y : \Omega \to S$ Funktionen mit $\{X \neq Y\} \in \mathcal{N}$. Beweise, dass X genau dann meßbar ist wenn Y meßbar ist.
   b) Sei $X_n : \Omega \to S$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $X : \Omega \to S$ eine Funktion, so dass $\{X_n \nrightarrow X\} \in \mathcal{N}$. Zeige, dass X meßbar ist.

2. Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{I}}$ eine Familie reeller Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und I eine beliebige Indexmenge. Zeige, dass diese Familie genau dann unabhängig ist, wenn für jede Wahl einer Familie $(\alpha_i)_{i \in I}$ reeller Zahlen die Familie $(\{X_i \leq \alpha_i\})_{i \in I}$ von Ereignissen unabhängig ist.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0,1]$, $\mathbb{P} = \lambda|_{[0,1]}$ (λ sei das Lebesguemaß auf $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}[0,1]$ die Borel σ-Algebra auf $[0,1]$). Betrachte die beiden stochastischen Prozesse X und Y mit der Indexmenge $T = [0,1]$:
$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & t = \omega \\ 0 & t \neq \omega \end{cases} \quad \text{und} \quad Y_t(\omega) = 0 \; \forall (t, \omega) \in [0,1] \times [0,1].$$
Zeige, dass X und Y dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen besitzen, aber X unstetige Pfade hat während die Pfade von Y alle stetig sind.

4. Es seien X und Z zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim N(0,1)$ und
$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}.$$
Definiere $Y = ZX$ und zeige, dass $Y \sim N(0,1)$, aber der Vektor (X, Y) nicht normalverteilt ist.

5. Es seien $Y \sim N(0,1)$ eine standard normalverteilte Zufallsvariable und $a > 0$ beliebig. Die Zufallsvariable Z sei definiert durch
$$Z = \begin{cases} Y & \text{falls } |Y| \leq a \\ -Y & \text{falls } |Y| > a. \end{cases}$$
Zeige, dass auch Z standard normalverteilt ist, d.h. $Z \sim N(0,1)$.