Alpen Adria Universität Klagenfurt
Institut für Statistik

H. Kazianka **Blatt 2**

Übungen zur VU Finanzstatistik (SS 2014)

9. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Filtration. Zeige die folgenden Eigenschaften von Stoppzeiten:
   a) Für eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten ist $\tau := \inf_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ eine Stoppzeit.
   b) Für eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten ist $\tau := \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ eine Stoppzeit.
   c) Für eine Stoppzeit τ und eine relle Zahl $\alpha \geq 1$ ist $\alpha\tau$ eine Stoppzeit.
   d) Für zwei Stoppzeiten τ und σ ist $\sigma + \tau$ eine Stoppzeit.

   Hinweis zu d): Zeige zuächst $\{\sigma + \tau < t\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,t]} \{\sigma < r, \tau < t - r\}$.
10. Sei $B : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ rechtsstetig und A, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und D messbare Funktionen von $[0, \infty)$ nach $\mathbb{R}$. Zeige die folgenden Aussagen:
    a) Ist $B_0 = 0$ und V die Variation von B, so gilt $|B| \leq V$.
    b) Ist B von endlicher Variation V, so ist auch $A \cdot B$ von endlicher Variation und es gilt $|(A \cdot B)_t| \leq (|A| \cdot V)_t$.
    c) Gilt $A_n \to A$ punktweise, $|A_n| \leq D$ und $D \cdot V < \infty$, dann gilt $A_n \cdot B \to A \cdot B$ punktweise für $n \to \infty$.
11. Vervollständige den Beweis von Satz 2.3. Sei F stetig differenzierbar und A stetig und von endlicher Variation, insbesondere also $F(A)$ von endlicher Variation. Zeige, dass $F(A_t) = F(A_0) + (F'(A) \cdot A)_t$ gilt.
    Hinweis: Zeige die Behauptung in vier Schritten: (a) Betrachte zunächst $F(x) = x$. (b) Ist die Behauptung für $F(x)$ richtig, so gilt sie auch für $xF(x)$. Verwende dazu Satz 2.2. (Partielle Integration) und die Assoziativität des Integrals. (c) Ist die Behauptung für $F_1(x)$ und $F_2(x)$ richtig, so auch für $aF_1(x) + bF_2(x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. (d) Benutze den Approximationssatz von Weierstrass und Aufgabe 10c.
12. Zeige: Sei τ eine Stoppzeit und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger Prozess. Dann ist der gestoppte Prozess X^τ ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{\tau\wedge t})_{t\geq 0}$ genau dann, wenn X^τ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist.
13. a) Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ lokale Martingale bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeige, dass dann auch $X + Y$ ein lokales Martingal ist.
    b) Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ ein quadratintegrables lokales Martingal und Z $\mathcal{F}_0$-messbar und quadratintegrabel. Zeige, dass dann auch ZX ein lokales Martingal ist.
14. Zeige, dass jedes nach unten beschränkte lokale Martingal $(X_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathbb{E}[M_0] < \infty$ ein Supermartingal ist. Ist zusätzlich $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ konstant, so ist X ein Martingal.
    Hinweis: Ist $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten, so gilt $X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n}$. Benutze Fatou's Lemma.

Bezeichnung: Ist A messbar und B rechtsstetig und von endlicher Variation, so bezeichnet $(A \cdot B)_t = \int_0^t A_s dB_s$ das Lebesgue-Stieltjes-Integral. Die Eigenschaften des Lebesgue-Stieltjes-Integrals für rechtsstetige und monotone Integratoren B werden vorausgesetzt, u.a. der Satz von Lebesgue (dominierte Konvergenz) und die Eigenschaft $|(A \cdot B)_t| \leq (|A| \cdot B)_t$.