Alpen Adria Universität Klagenfurt
Institut für Statistik

**H. Kazianka** **Blatt 1**

# Übungen zur VU Finanzstatistik (SS 2014)

1. Seien $X = (X_t)_{t\in I}$ und $Y = (Y_t)_{t\in I}$ stochastische Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $I \subset \mathbb{R}$. Zusätzlich seien $X$ und $Y$ stetig. Beweise, dass $X$ eine Version von $Y$ ist, genau dann wenn $X$ und $Y$ ununterscheidbar sind.
   *Hinweis: Angenommen $X$ ist eine Version von $Y$. Zeige zunächst $\bigcap_{t\in I\cap\mathbb{Q}}(\Omega \setminus N_t) \subset \bigcap_{t\in I}\{X_t = Y_t\}$, wobei $N_t \in \mathcal{F}$ jene Nullmengen sind, für die $\{X_t \neq Y_t\} \subset N_t$ für alle $t \in I$ gilt. Bilde anschließend die Komplementärmengen.*

2. Beweise die folgenden Aussage mit Hilfe charakteristischer Funktionen:
   a) Ein $d$-dimensionaler Zufallsvektor $\boldsymbol{V}$ ist genau dann mehrdimensional normalverteilt, wenn jede Linearkombination $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$, eindimensional normalverteilt ist.
   b) Seien $(\boldsymbol{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\boldsymbol{X}$ $d$-dimensionalen Zufallsvektoren. Es gilt $\boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{X}$ genau dann, wenn $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}_n \to \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}$ für alle $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$.

3. Beweise die folgenden Aussagen:
   a) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann ist der Prozess $X$ definiert durch $X_t = B_t - tB_1$ mit $t \in [0,1]$ eine Brownsche Brücke.
   b) Ist $X$ eine Brownsche Brücke, so ist auch $Y$ mit $Y_t = X_{1-t}$ eine Brownsche Brücke.
   c) Ist $X$ eine Brownsche Brücke, so ist $Y$ mit $Y_t = (1+t)X_{\frac{1}{1+t}}$ eine Brownsche Bewegung.

4. Für $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ sei für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen definiert:
$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \int_{A_1} \phi_{0,t_1}(x_1) \int_{A_2} \phi_{x_1,t_2-t_1}(x_2) \ldots \int_{A_n} \phi_{x_{n-1},t_n-t_{n-1}}(x_n)dx_n \ldots dx_1,$$
   wobei $\phi_{a,b}(.)$ die Dichte einer $\mathcal{N}(a,b)$-verteilten Zufallsvariable bezeichnet. Beweise die folgenden Aussagen:
   a) Die so definierte Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist projektiv.
   b) Sei $X$ der zu dieser Familie gehörige stochastische Prozess. $\boldsymbol{Z} = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ hat die folgende charakteristische Funktion: $\varphi_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{E}[e^{i\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Z}}] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}\right\}$ mit
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$
   *Hinweis: Es gilt $\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} u_j\right)^2 (t_{i+1} - t_i) = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{u}$ für $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$ und $t_0 = 0$.*
   c) $X$ ist eine Brownsche Bewegung.

5. Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Beweise die folgenden Aussagen:
   a) $X_t = B_{s+t} - B_s$ für $s \geq 0$ ist ebenfalls eine Brownsche Bewegung.
   b) $X_t = -B_t$ ist ebenfalls eine Brownsche Bewegung.
   c) $X_t = c^{-1}B_{c^2 t}$ für $c > 0$ ist ebenfalls eine Brownsche Bewegung.
   d) $X_t = B_{s-t} - B_s$ für $s > 0$ ist eine Brownsche Bewegung auf $[0, s]$.

6. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen $s = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_k^{(n)} = t$ des Intervalls $[s,t] \subset [0,\infty)$ mit Feinheit $|\Delta_n| = \max_{i=0,\ldots,k-1} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}|$. Sei ferner $T_{[s,t]}^{\Delta_n} = \sum_{i=0}^{k-1}(B_{t_{i+1}^{(n)}} - B_{t_i^{(n)}})^2$. Zeige, dass $T_{[s,t]}^{\Delta_n}$ fast sicher gegen $t - s$ konvergiert, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \infty$.
   *Hinweis: Ist $(X_n)^{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, welcher der Bedingung $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ genügt, dann konvergiert die Folge fast sicher gegen 0 (Beweis siehe HB Seite 74 mit dem Borel-Cantelli Lemma). Benutze dies und die Abschätzung aus dem Beweis von Satz 1.9.*

7. Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Beweise die folgenden Aussagen:
   a) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
   b) $(\exp\left\{iuB_t + \frac{1}{2}u^2 t\right\})_{t\geq 0}$ für $u \in \mathbb{R}$ ist ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

8. Beweise die folgenden Aussagen unter Zuhilfenahme der Sätze 1.25, 1.8 und 1.13:
   a) $\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} = 1$ f.s.
   b) $\liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} = -1$ f.s.
   c) $\limsup_{t\to 0} \frac{B_{s+t} - B_s}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} = 1$ f.s. für $s \geq 0$.