Günther Ossimitz

Vorlesung "Ang. Mathematik für Betriebswirte"

Vorlesungsfolien Teil 2

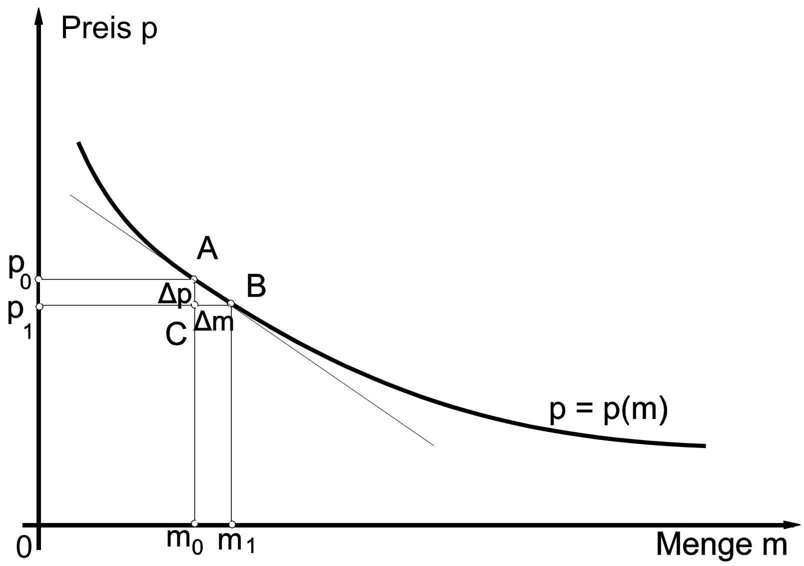
Diese Datei VOFL98_2 enthält
Folien S. 47-93 (Wochen 5-8) zu den Themen
Elastizität, mehrdimensionale Differentialrechnung
Gleichungssysteme, Matrizen

Die Folien Seite 1 - 46 zu den Themen
Modellbilden, Funktionen, Differentialrechnung
sind in Datei VOFL98_1 und zu den Themen
Optimierung, Netzpläne, Finanzmathematik
sind in Datei VOFL98_3 enthalten.

Viel Spaß und Erfolg wünscht G. Ossimitz

Vorlesung Angew. Mathematik für BWL
5. Woche

5.1 Elastizität



Wir betrachten zunächst die Preis-Absatz-Funktion eines monopolistischen Anbieters. Frage: Wie entwickelt sich der Umsatz, wenn der Monopolist die angebotene Menge von m_0 auf m_1 erhöht? $U_0 = m_0 \cdot p_0$; $U_1 = m_1 \cdot p_1$ Geometrisch entspricht dem Umsatz U_0 die Fläche des Rechtecks $0m_0Ap_0$; dem Umsatz U_1 die Fläche des Rechtecks $0m_1Bp_1$. Wie sich der Umsatz ändert, ergibt sich aus dem Saldo der beiden schraffierten Rechteckstücke mit den Flächen $m_0 \cdot \Delta p$ bzw. $\Delta m \cdot p_1$.
Es gilt: Wenn der Quotient $m_0 \cdot \Delta p \,/\, \Delta m \cdot p_1 < 1$, dann steigt der Umsatz, wenn statt m_0 die Menge m_1 angeboten wird. Analog fällt der Umsatz beim Übergang von m_0 auf m_1, wenn $m_0 \cdot \Delta p \,/\, \Delta m \cdot p_1 > 1$ ist.

Der Quotient $\frac{m_0 \cdot \Delta p}{\Delta m \cdot p_1} = \frac{m_0}{p_1} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta m}$ kann nun mit Ideen der Differentialrechnung angenähert werden: durch den Grenzübergang $m_1 \to m_0$ wird aus dem Differenzen-quotienten $\frac{\Delta p}{\Delta m}$ der Differentialquotient $\frac{dp}{dm} = p'(m_0)$;

es gilt auch: $p_1 \approx p(m_0)$, weil sich auch p_1 an p_0 annähert.

Insgesamt: $\frac{m_0 \cdot \Delta p}{\Delta m \cdot p_1} \approx m_0 \cdot p'(m_0)/p(m_0)$.

Dieser letzte Ausdruck ist bereits die Elastizität unserer Preis-Absatz-funktion. Dies motiviert die folgende allgemeine Definition von Elastiziät, die ein wichtiges Änderungsmaß von Wiwi-Funktionen ist.

5.1.1 Definition Elastizität:

Sei f eine auf einem Intervall [a;b] differenzierbare Funktion mit f ' als Ableitungsfunktion und x_0 aus (a;b). Wir definieren
$f^{El}(x_0) := x_0 \cdot f'(x_0)/f(x_0)$. Die Zahl $f^{El}(x_0)$ nennen wir die **Elastizität** von f an der Stelle x_0.

Man kann mit dieser Berechnungsvorschrift $f^{El}(x_0)$ für alle x-Werte aus dem Intervall (a;b) berechnen und erhält damit eine Funktion $f^{El}(x):=x \cdot f'(x)/f(x)$,
die jedem $x_0 \in (a;b)$ die Elastizität $f^{El}(x_0)$ zuordnet.

Anmerkungen:

- Wenn x_0 und $f(x_0)$ beide > 0 sind (d.h. f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$), dann haben $f^{El}(x_0)$ und $f'(x_0)$ dasselbe Vorzeichen.
- Elastizitäten spielen in der BWL häufig bei fallenden Funktionen (also $f' < 0$, z.B. Nachfragefunktionen) eine Rolle. Damit wird auch die Elastizität für Funktionen des Typs f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ negativ.
- Negative Elastizitäten vermeidet man in WiWi-Anwendungen normalerweise, indem man als Elastizität den Absolutwert der oben definierten Elastizität nimmt, also $f^{El}(x_0) := |x_0 \cdot f'(x_0)/f(x_0)|$.
- Diese Ungenauigkeit (wir haben zwei Definitionen von Elastizität, die sich i.a. durch das Vorzeichen unterscheiden) kann aus folgenden Gründen toleriert werden: bei der Elastizität kommt es nicht so sehr auf das Vorzeichen an, sondern auf die Frage, ob $|f^{El}(x_0)| > 1$ oder $|f^{El}(x_0)| < 1$ gilt. Im ersteren Fall heißt f bei x_0 **elastisch**, im zweiteren Fall **unelastisch**.

5.1.2 Beispiel: Nachfrage nach Zigaretten:

x: Anzahl angebotener Zigaretten (in Mio Stk p.m.)
p(x) Preis pro Zigarette in ÖS.
$p(x) = 4 – 0{,}2x$; (Preis-Absatzfunktion)
Damit ist $p'(x) = –0{,}2$ [1]
Für x=5 Mio Stk beträgt $p(x) = 4 – 0{,}2 \cdot 5$ = ÖS 3,00/Zig.
und die Elastizität $p^{El}(5) = 5 \cdot (-0{,}2) / (4 – 0{,}2 \cdot 5) = -1/3$.
Weil $|p^{El}(5)| < 1$, kann man nach 5.1 folgern, dass hier eine Erhöhung der angebotenen Menge den Umsatz steigert.

Mißt man x in Stk statt in Mio Stk pro Monat, so lautet
$p(x) = 4 – 0{,}0000002x$ bzw. $p'(x) = –0{,}0000002$ [2]
z.B. für x = 5.000.000 Stk.
$p(5.000.000) = 4 – 0{,}0000002 \cdot 5.000.000$ = ÖS 3,00/Zig.
Durch die Wahl geeigneter Einheiten (z.B. Mio Stk statt Stk) bekommt man also Funktionen mit “angenehmeren” Koeffizienten. Beachte: die Ableitung p'(x) hängt von der Wahl der Einheiten ab (vgl. [1] und [2]). Dies gilt auch dann, wenn z.B. Einheiten der Ordinate geändert werden (z.B. andere Währung).

Die Elastizität $p^{El}(x)$ ist hingegen ein Maß für die Änderung der Funktion p, dass nicht von der Wahl der Einheiten abhängt:
Nimmt man analog zum vorigen Beispiel für x als Einheit “Stück” statt “Mio Stück”, dann ändert sich p(x) auf $p(x) =4 - 0{,}0000002x$ und
$p^{El}(x) = x \cdot (-0{,}0000002) / (4 - 0{,}000002x)$. Dann ist wiederum
$p^{El}(5000000) = 5000000(-0{,}0000002) / (4 - 0{,}000002 \cdot 5000000) = -1/3$.

5.2 WiWi-Anwendung von Elastizität

Ähnlich wie bei der Anwendung des Ableitungsbegriffes beim “Grenzkonzept” wird auch beim Anwenden des Elastizitätskonzepts eine gewisse Vergröberung durchgeführt, die zwar mathematische Schärfe kostet, aber praktisch umsetzbares Verständnis bringt.

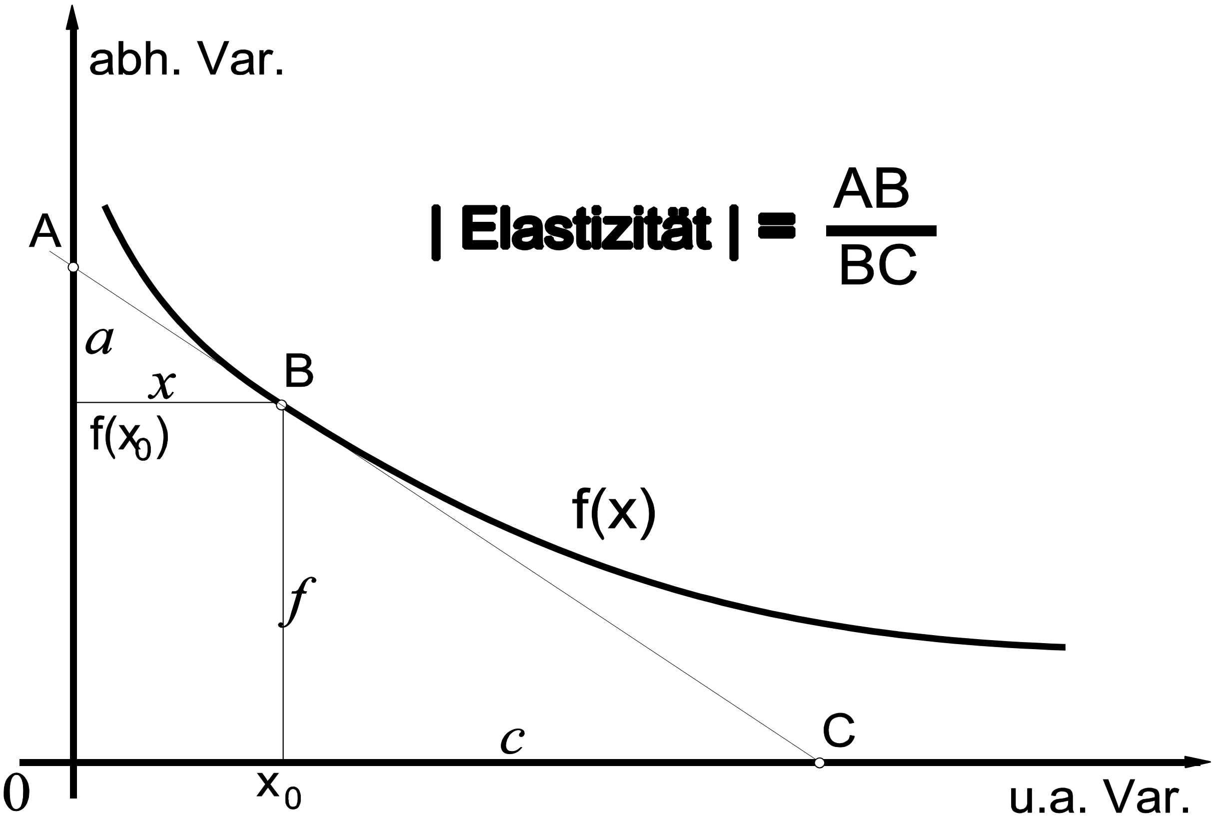
Während die erste Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 in etwa die absolute Änderung von f(x) angibt, wenn x um 1 Einheit wächst, gibt die Elastizität $f^{El}(x_0)$ einer Funktion f an einer Stelle x_0 *näherungsweise* an, um wieviel % sich f(x) ändert, wenn x um 1% erhöht wird. Die erste Ableitung beschreibt den Quotienten zweier absoluter Änderungen, die Elastizität den Quotienten zweier relativer Änderungen. Damit entspricht die Elastizität dem Änderungsmaß Änd4 aus Abschnitt 3.3 .
Man kann das leicht herleiten:

$$\begin{aligned} f^{El}(x) &= x \cdot f'(x) / f(x) = f'(x) \cdot x/f(x) = \\ &= [df(x)/dx] \cdot [x/f(x)] = \\ &= df(x)/f(x) \cdot dx/x , \end{aligned}$$

wobei nun der Quotient df(x)/f(x) die relative Änderung von f(x) und der Quotient dx/x die relative Änderung von x beschreibt.

Der einzige Unterschied zu Änd4 besteht darin, dass dort die endliche Differenz $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0 = \Delta f(x)$ anstelle des infinitesimalen Differentials df(x) steht. Analoges gilt für dx, das anstelle der endlichen Differenz $x_1 - x_0 = \Delta x$ steht.

5.3 Elastizität: geometrische Deutung



Der Betrag der Elastizität in B kann als das Verhältnis der beiden Strecken AB/BC definiert werden.

Herleitung:

$f^{El}(x_0) = |x_0 \cdot f\,'(x_0)/f(x_0)| = x \cdot (a/x) \,/\, f = a/f$ = AB/BC (wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $ABf(x_0)$ und BCx_0).

Damit gibt es eine einfache Möglichkeit, bei einer graphisch gegebenen Funktion für einen bestimmten Punkt abzuschätzen, ob f in diesem Punkt $B = (x_0;f(x_0))$ elastisch ist oder nicht: man lege (eventuell nur gedanklich) eine Tangente an f(x) in B und vergleiche die beiden Abschnitte. Wenn der Abschnitt zur Achse mit der unabhängigen Variablen kürzer ist als der andere Abschnitt, dann ist f in B elastisch, anderenfalls unelastisch.

Da beim Invertieren von f bei der Definition der Elastizität die Strecken AB und BC "Platz tauschen", gilt: die Elastizität von f^{-1} in $f(x_o)$ ist $1/f^{El}(x_0)$. Wo f elastisch ist, ist f^{-1} unelastisch und umgekehrt.

5.4 Elastizität bei linearen Preis-Absatzfunktionen:

Gegeben sei die Preis-Absatzfunktion $p(m) = 4 – 0{,}2m$

Der Erlös $Erl(m) = m \cdot p(m) = 4m – 0{,}2m^2$

Die Elastizität $p^{El}(m) = p'(m) \cdot m/p(m) = -0{,}2\ m/(4-0{,}2m)$

Wir tabellieren m, p(m), Erl(m) und $p^{El}(m)$ für m = 0...20:

Menge m	Preis p(m)	Erlös Erl(m)	Elastizität $p^{El}(m)$	elastisch?
0	4	0	0	nein
2	3,6	7,2	-0,111	nein
4	3,2	12,8	-0,250	nein
5	3	15	-0,333	nein
8	2,4	19,2	-0,667	nein
9	2,2	19,8	-0,818	nein
10	2	20	-1,000	=
11	1,8	19,8	-1,222	ja
12	1,6	19,2	-1,500	ja
15	1	15	-3,000	ja
16	0,8	12,8	-4,000	ja
18	0,4	7,2	-9,000	ja
19	0,2	3,8	-19,000	ja
20	0	0	#DIV/0!	

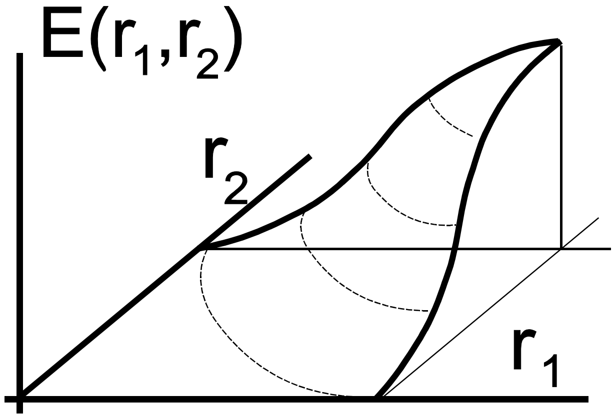
Man sieht:

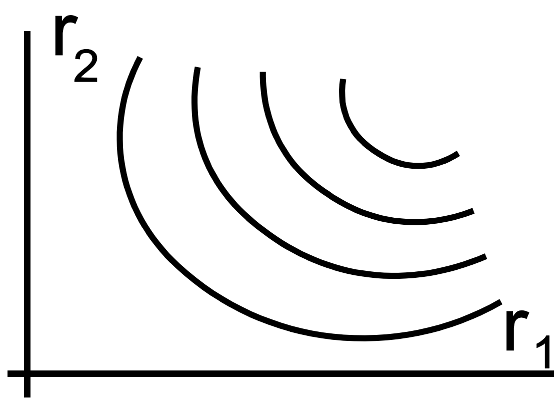
- p(m) ist für m zwischen 0 und 10 unelastisch und für m zwischen 10 und 20 elastisch.
- Wo der Erlös bei wachsendem Preis zunimmt, da ist p(m) elastisch. Wo der Erlös bei wachsendem Preis fällt, ist p(m) unelastisch. Damit kann man die Preiselastizität auch über Erlösänderungen definieren.

Aufgabe: Berechnen Sie die Elastizität für die zu p(m)=4-0,2m inverse Nachfragefunktion und weisen Sie nach, dass sich genau die Kehrwerte der Elastizitäten von oben ergeben!

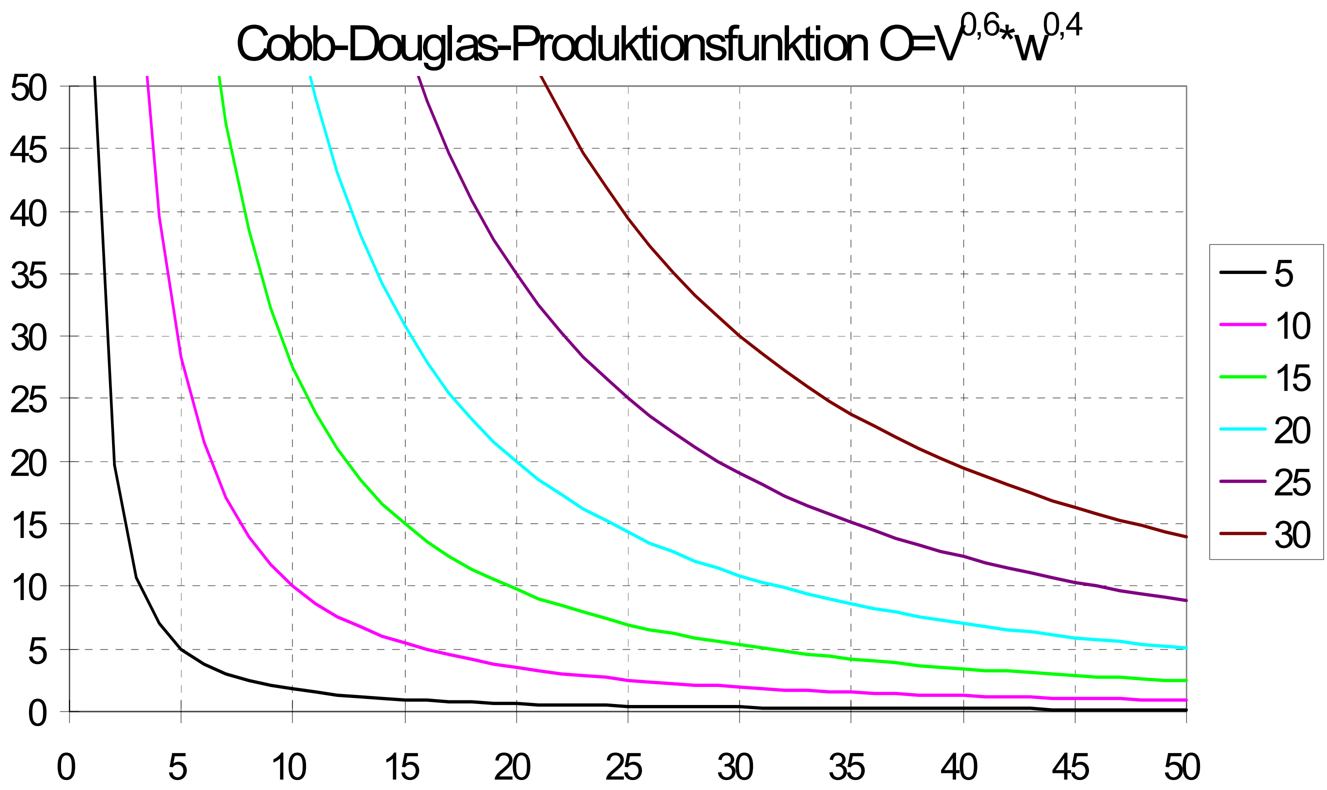
5.5 Funktionen mit 2 unabh. Variablen

Beispiele:
$E(r_1,r_2)$ als "Ertragsgebirge" bzw. in Isoliniendarstellung.



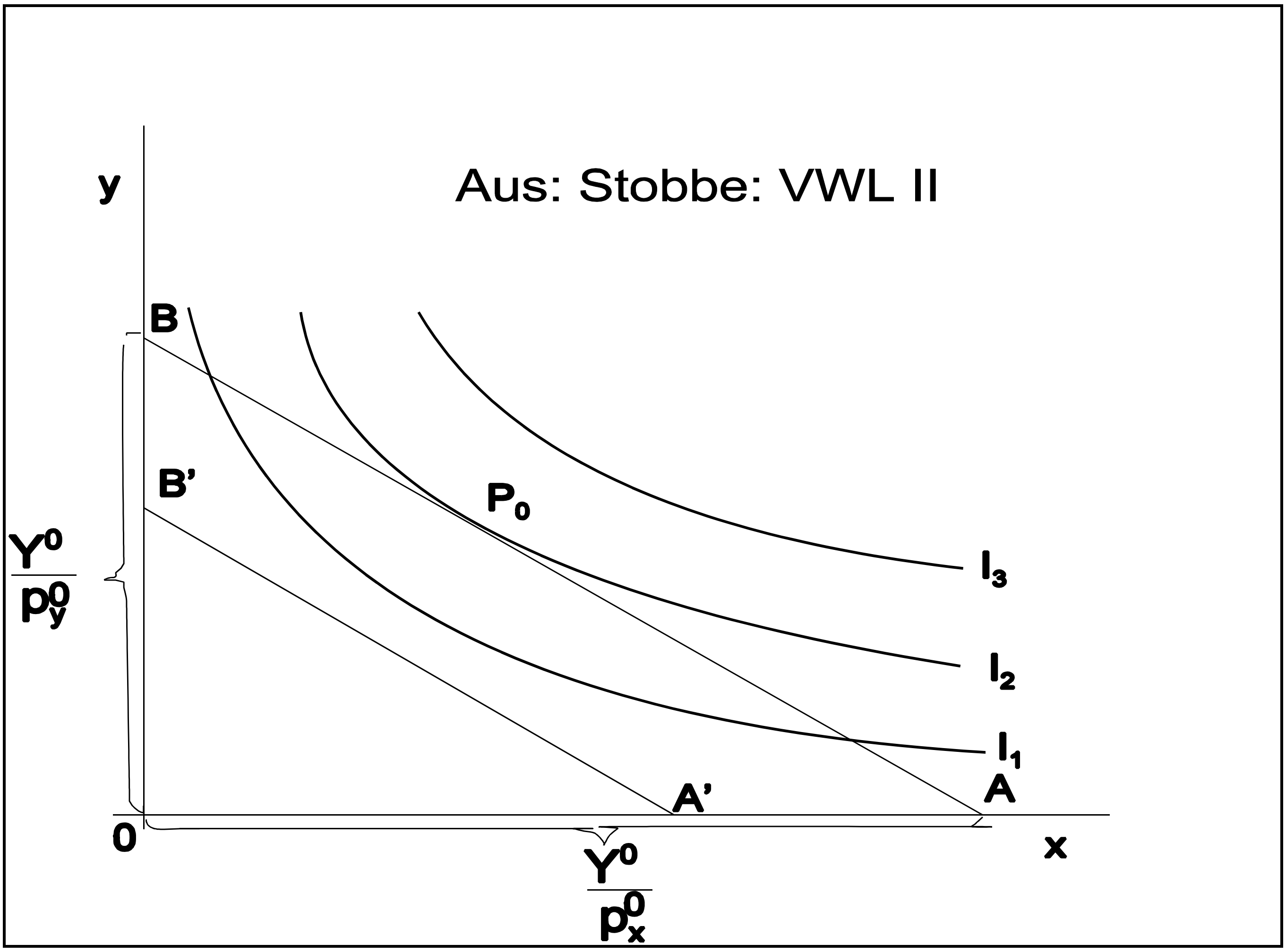


Beispiel:
Cobb-Douglas Produktionsfunktion $O(v,w) = v^{0,6} \cdot w^{0,4}$. Die Summe der Exponenten muss 1 sein.
In der Abbildung sind Isolinien für O=5,10,15,20,25,30 dargestellt.



5.6 Nichtlin. Optimierung von Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

Beispiel: Nutzenisoquanten:



x: Menge von Gut Gx y: Menge von Gut Gy

Y^0: Verfügbares Einkommen.

p_x^0: Preis/ME Gx p_y^0: Preis/ME Gy

A: Menge, die bei Einkommen Y^0 von Gx gekauft werden kann, wenn nichts von Gy gekauft wird.

B: Menge, die bei Einkommen Y^0 von Gy gekauft werden kann, wenn nichts von Gx gekauft wird.

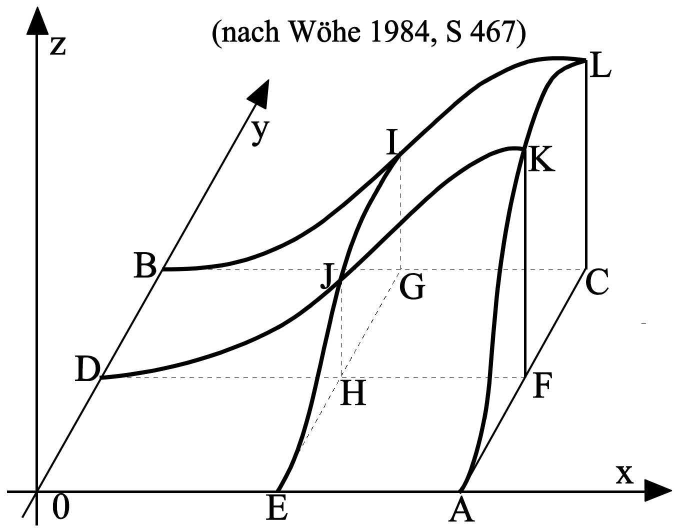
I_1, I_2, I_3: Isolinien gleichen Gesamtnutzens

AB: Budgetgerade für Einkommen Y^0

Fragestellung: welche Güterkombination Gx und Gy ist für Einkommen Y^0 optimal? Graph. Lösung mittels Isolinien möglich.

5.7 Partielle Ableitungen:

Idee: man variiert nur eine unabhängige Variable und hält die andere(n) unabhängige(n) Variable(n) auf einem konstanten Wert. Damit erhält man de facto eine Funktion mit nur mehr einer unabhängigen Variablen. Diese wird nach den üblichen Differenzierregeln abgeleitet; die übrigen unabhängigen Variablen werden wie Konstante behandelt.



Geometrisch: Gegeben sei eine Funktion $z = f(x,y)$. Man schneidet das “Funktionsgebirge” parallel zu einer der beiden horizontalen Achsen (x oder y) und erhält so eine Funktion von $R^1 \rightarrow R^1$.
z.B. $z = f(x)$, indem y konstant gehalten wird ⇔ Schnitt parallel zu x-Achse. Die einfache Ableitung dieser Funktion heißt dann *partielle Ableitung von f nach* x, symbolisch $\partial f/\partial x = f_x$. Sei z.B.

- $f(x,y) = 2xy + y^2$; so ist
  $\partial f/\partial x = f_x = 2y$ (in $2xy + y^2$ wird x als Variable und y als Konstante behandelt)
  $\partial f/\partial y = f_y = 2x + 2y$ (in $2xy + y^2$ wird y als Variable und x als Konstante behandelt)
- $O(v,w) = v^{0,6}w^{0,4}$(Cobb-Douglas Produktionsfunktion)
  $\partial O/\partial v = 0,6\cdot v^{-0,4}w^{0,4}$ und $\partial O/\partial w = 0,4\cdot v^{0,6}w^{-0,6}$

Höhere partielle Ableitungen: partielle Ableitungen werden nochmals partiell abgeleitet:
$f_{xx} := (f_x)_x$; $f_{yy} := (f_y)_y$;
$f_{xy} := (f_x)_y$ (zuerst nach x, dann nach y partiell ableiten)
$f_{yx} := (f_y)_x$ (zuerst nach y, dann nach x partiell ableiten).
I.a. ist $f_{xy} = f_{yx}$.

5.8 Extrema von Funktionen $R^2 \rightarrow R^1$

Gegeben $z = f(x,y)$. Wo hat $f(x,y)$ sein Extremum?
Idee: Wenn beide partiellen Ableitungen $f_x(x_0,y_0)= 0$ und $f_y(x_0,y_0)= 0$ sind, dann hat das Funktionsgebirge im Punkt (x_0,y_0) eine horizontale Tangentialebene. Damit kann (aber muß nicht!) in (x_0,y_0) ein Extremum vorliegen!

Falls neben $f_x(x_0,y_0) = 0$ und $f_y(x_0,y_0) = 0$ zusätzlich gilt:
$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0) > 0$ sowie
$f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, so liegt ein Minimum vor.

Falls neben $f_x(x_0,y_0) = 0$ und $f_y(x_0,y_0) = 0$ zusätzlich gilt:
$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x_0, y_0) > 0$ sowie
$f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, so liegt ein Maximum vor.

Beispiel:
$f(x,y) = 3x + 4y -xy + 3x^2$
1. part. Ableitungen: $f_x(x,y) = 3 - y +6x$; $f_y(x,y) = 4-x$
2. part. Ableitungen: $f_{xx}(x,y) = 6$; $f_{xy}(x,y) =-1$; $f_{yy}(x,y) = 0$

$f_x(x,y) = 0$ und $f_y(x,y) = 0$ liefert $x=4$ bzw. $y=27$. Im Punkt (4;27) könnte somit ein Extremum liegen. Wegen
$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{xy})(4,27) = -1$ ist jedoch die Bedingung
$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) > 0$ nicht erfüllt und $f(x,y)$ besitzt kein Extremum, sondern in (4,27) nur einen Sattelpunkt.

Vorlesung Angew. Mathematik für BWL 6. Woche

Grundlage: Skriptum “Lineare Gleichungssysteme und ihre Anwendungen” (verfügbar unter http://www.uni-klu.ac.at/~gossimit).

6.1 Der Variablenbegriff in der Mathematik

Beispiel: Es sei S die Anzahl der Studenten und P die Anzahl der Professoren einer Universität. Auf einen Professor kommen sechs Studenten. Drücken Sie diesen Sachverhalt durch eine Gleichung in den Variablen S und P aus! Welche Lösung ist richtig?
[1] $P = 6S$ oder
[2] $6P = S$?

Da P die *Anzahl* der Professoren und S die *Anzahl* der Studenten ist, ist Antwort [2] richtig. Wenn z.B. $P=100$, dann ist $S= 600$ und damit $6P = S$.

ACHTUNG: Ein vager Variablenbegriff führt zu falsch aufgestellten Gleichungen! Immer beachten, was die einzelnen Variablen **genau** bedeuten. Zu sagen: “P sind die Professoren und S die Studenten” ist zu ungenau. Dies kann zur falschen Gleichung $6S = P$ (in der Interpretation “Auf 6 Studenten kommt 1 Professor”) führen!

6.2 Lineare Gleichungen

Eine lineare Gleichung besteht aus folgenden Komponenten:

a) eine oder mehrere Variable x, y, z oder x_1, x_2, x_3, usw. Die Variablen treten nur in erster Potenz auf.

b) Koeffizienten, mit denen die einzelnen Variablen multipliziert werden. Einzelne Koeffizienten können auch = 0 sein.

c) ein Absolutglied: eine beliebige Zahl.

Z.B. $2x + 3y = 4$
x, y: Variablen; 2, 3: Koeffizienten; 4: Absolutglied

$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = e$
x_i: Var.; a,b,c,d: Koeffizienten; e: Absolutglied

6.3 Definitionsmenge bei linearen Gleichungen

Definitionsmenge einer Variablen: Zahlenmenge, aus der die möglichen Werte der Variablen kommen. Wir nehmen meist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Definitionsmenge, auch wenn i.a. von der Sachlogik her nur ein kleiner Ausschnitt der reellen Zahlen praktisch einen Sinn macht. Grund: bei kleineren Definitionsmengen sind manche Rechengesetze nicht mehr sicher erfüllt.

6.4 Lösungsmenge einer linearen Gleichung

Eine lineare Gleichung mit einer Variablen besitzt genau eine eindeutige Lösung. Z.B. $x = 5$. Die Lösungsmenge enthält nur das Element 5. $L = \{5\}$.

Eine lineare Gleichung mit mindestens 2 Variablen hat unendlich viele Lösungen. z.B. die Gleichung $-2x + y = 4$ hat die Lösungen ($x=0;y=4$) [kurz:(0;4)] sowie u.a. die Lösungen (0,5;5), (1;6), (2;8), (3;10) usw. L = {(0;4),(0,5;5),(1;6),)2;8),(3;10),...} Eine vollständige Aufzählung aller Lösungen ist bei unendlichen Lösungsmengen nicht möglich. Es ist aber eine vollständige Beschreibung aller Lösungen mittels Parametern (s.u.) möglich.

Lösungsmenge: Menge aller Kombinationen von Variablenwerten, die die Gleichung erfüllen.

6.5 Lösungsmengen bei Anwendungsbeispielen

Bei Anwendungsaufgaben können die einzelnen Variablen nicht beliebige relle Zahlen als Werte annehmen. Oft sind z.B. negative Werte oder nichtganzzahlige Werte von der Sache her unmöglich (z.B. bei produzierten Stückzahlen). Um lineare Gleichungen oder lineare Gleichungssysteme dennoch komfortabel handhaben zu können, geht man zweckmäßigerweise folgend vor:

1) Als Definitionsmenge wird für alle Variablen **R** angenommen: jede Var. kann im Prinzip jeden reellen Wert annehmen (ist math. am bequemsten)
2) Lösungsmenge unter Voraussetzung 1) bestimmen
3) Lösungen, die sachlogisch nicht passen (z.B. Zahlen < 0, oder nichtganzzahlige Lösungen) werden ausgeschieden.

6.6 Beschreibung von Lösungsmengen

hängt davon ab, wieviele Elemente die Lösungsmenge enthält:

a) Lösung ist eindeutig: direkte Angabe der Lösung.

b) Lösungsmenge enthält unendlich viele Elemente: Dann ist die Lösungsmenge ein linearer Teilraum (Gerade, Ebene); Beschreibung mittels Parametern

Es gilt:
Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit n Variablen läßt sich mit Hilfe von n-1 Parametern beschreiben. (2 Variable: 1 Parameter; 3 Variable: 2 Parameter...)

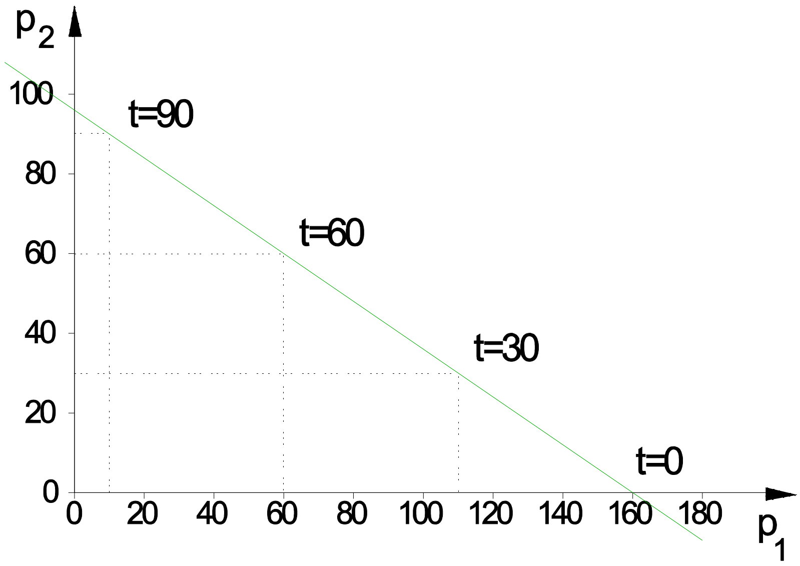
6.7 Parameter und Parameterlösungen:

Gegeben: $3p_1 + 5p_2 = 480$ (1)
Gesucht: Beschreibung der Lösungsmenge von (1) mittels Parameter t. (2 Variable → 1 Parameter nötig).
Sei $p_2 = t$. Dann kann man beide Variablen direkt aus t ausrechnen: Es gilt

$p_1 = 160 - 5/3t$
$p_2 = t$

t = 0 liefert die Lösung (160;0)

t = 30 liefert die Lösung (110;30)



6.8 Begriff "Lineares Gleichungssystem" (LGS)

$$\begin{array}{llllll}
[1] & 2x_1 & + 3x_2 & & & = 7 \\
[2] & & 4x_2 & + 7x_3 & + 7x_4 & = 11 \\
[3] & 2x_1 & & - 3x_3 & & = 4
\end{array}$$

Achtung! Jede der Gleichungen [1], [2] und [3] enthält alle 4 Variablen x_1, x_2, x_3 und x_4; gegebenenfalls mit Koeffizienten 0. Z.B. [1]: $2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 7$. Dies wird deutlicher in der sogenannten Tableauform:

x_1	x_2	x_3	x_4	RS
2	3	0	0	7
0	4	7	7	11
2	0	-3	0	4

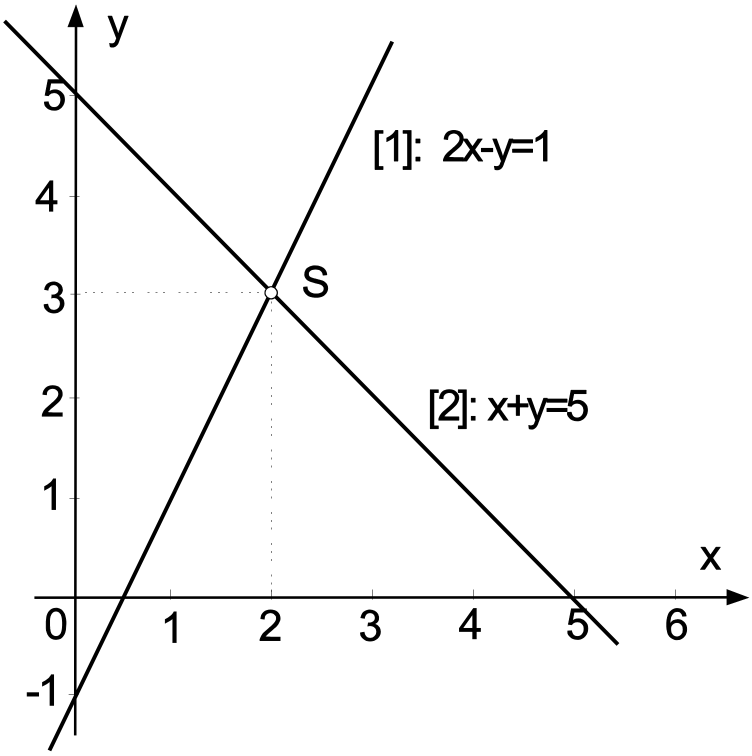
6.9 Lösen eines LGS

Lösung eines LGS: eine Kombination von Variablenwerten, die **jede** der Gleichungen des GLS löst.
z.B. das Quadrupel $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2; 1; 0; 1)$ ist Lösung, weil alle Gleichungen [1], [2], [3] erfüllt sind.
das Quadrupel $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2; 1; 1; 0)$ ist keine Lösung, weil Gleichung [3] nicht erfüllt ist.

Die **Lösungsmenge** eines LGS ist diejenige mathematische Menge, die alle Lösungen des LGS enthält. Es können verschiedene Fälle von Lösungsmengen auftreten. Wir betrachten Beispiele mit 2 Variablen.

6.9.1 Lösungsmenge ist ein lin. Teilraum

Gegeben sei LGS mit 2 Var. und nur einer Gleichung:
[1] $2x - y = 1$ besitzt Parameterlösung



$$\begin{aligned} x &= 1/2 + 1/2\, t \\ y &= t \end{aligned}$$

6.9.2 Lösung ist eindeutig

Das 2x2 System (d.h. 2 Gleichungen, 2 Variablen)

[1] $2x - y = 1$
[2] $x + y = 5$

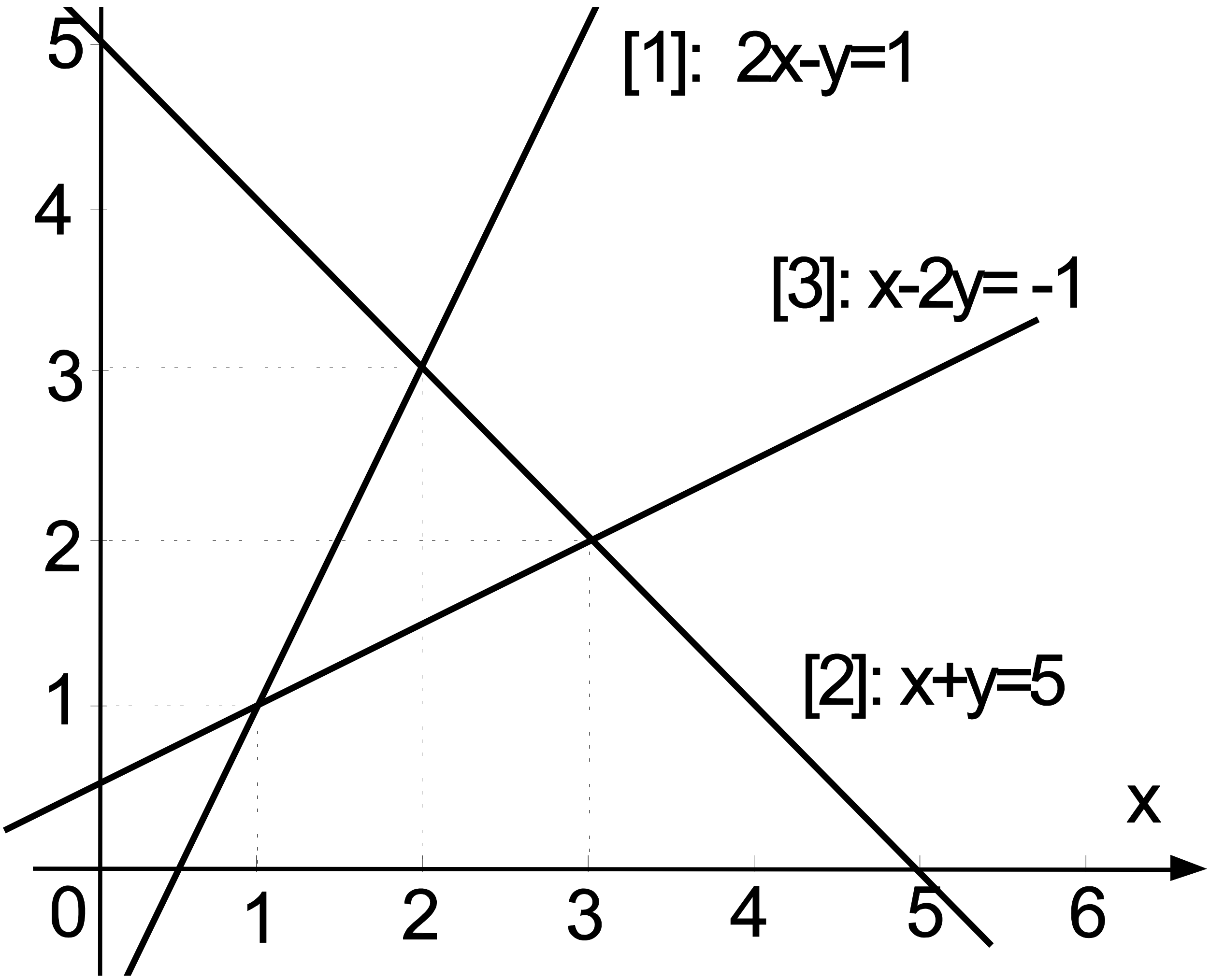
besitzt die eindeutige Lösung $(x;y) = (2;3)$ (Schnittmenge der linearen Teilräume; siehe Abb.)

6.9.3 Leere Lösungsmenge (keine Lösung)

Das 3x2 System

[1]	$2x - y = 1$
[2]	$x + y = 5$
[3]	$x - 2y = -1$

besitzt hingegen keine Lösung mehr (geometrisch: kein gemeinsamer Schnittpunkt der 3 Geraden).

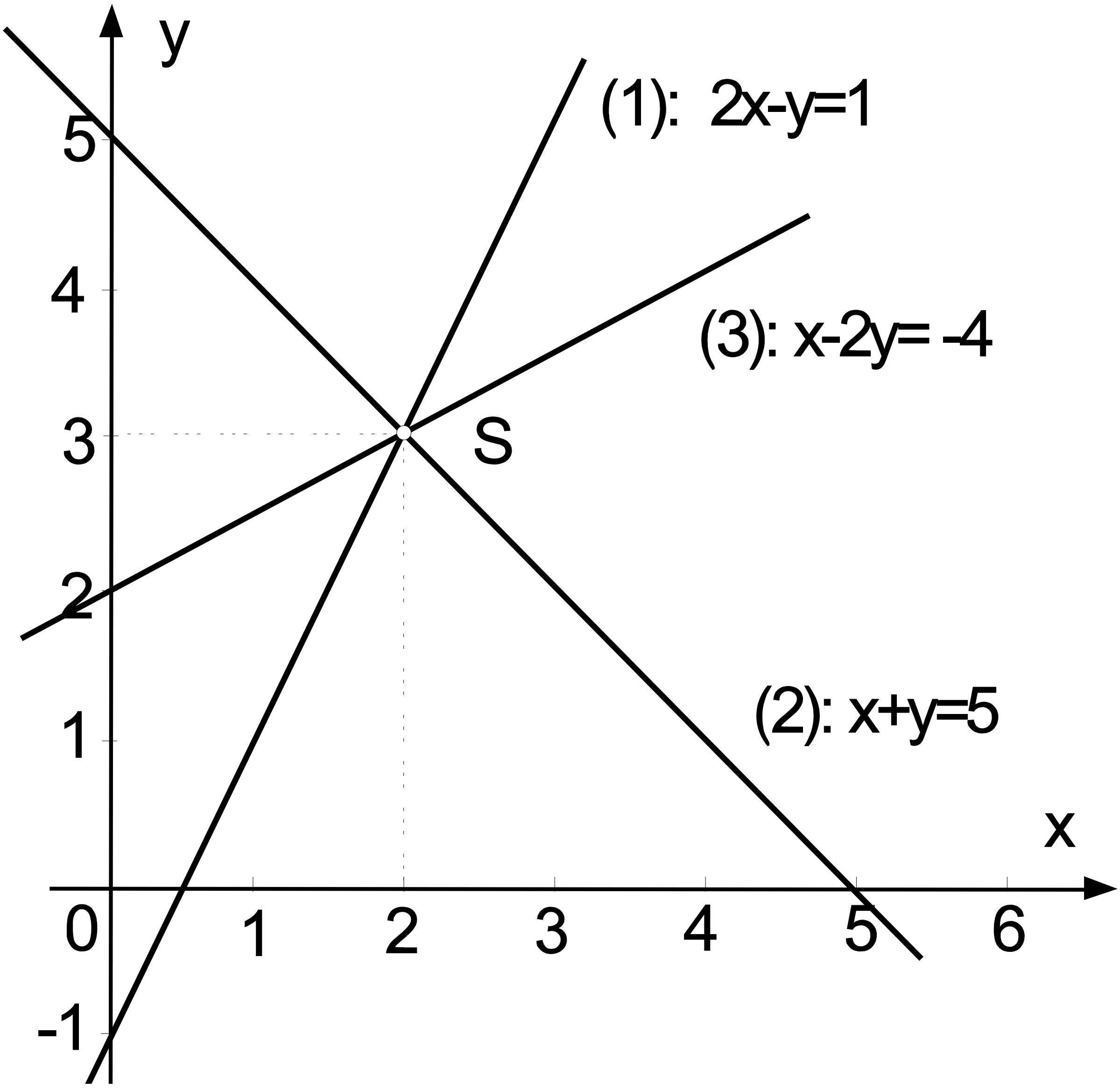


6.9.4 Sonderfall

[1] $2x - y = 1$

[2] $x + y = 5$

[3] $x - 2y = -4$



Drei Gleichungen mit 2 Variablen besitzen eine eindeutige Lösung, weil alle Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

6.9.5 Zusammenfassung:

a) Wenn das System gleich viele Gleichungen wie Variable hat, ist es i.a. eindeutig lösbar. Ausnahmen:

- zusammenfallende Gleichungen haben als Lösungsmenge einen linearen Teilraum: z.B.
  [1] $2x + y = 3$
  [2] $4x + 2y = 6$
- unvereinbare Gleichungen (parallele Gerade): Lösungsmenge ist leer.
  [1] $2x + y = 3$
  [2] $2x + y = 5$

b) Enthält das System mehr Gleichungen als Variable, ist es i.a. unlösbar (Lösungsmenge ist leer).
Ausnahme: Sonderfall 6.9.4

c) Enthält das LGS mehr Variable als Gleichungen, gibt es i.a. einen linearen Teilraum als (unendliche) Lösungsmenge. Der lineare Teilraum mittels Parametern beschrieben werden.

Es gilt generell in einem (nichtentarteten) LGS:

Anz. Parameter d. Lösungsm. = Anz. Variablen – Anz. Gleichungen

6.10 Klassifikation der Verfahren zur Lösung LGS

6.10.1 Klassifikation nach Grad der Allgemeinheit:

- allgemeine Lösungsverfahren (z.B. Gauß'sches Eliminationsverfahren) erkennen auch nicht-eindeutige Fälle und liefern ggf. Parameterlösungen.
- spezielle Lösungsverfahren zum Lösen eindeutig lösbarer LGS (z.B. Substitutionsverfahren)

6.10.2 Klassifikation nach Art der Hilfsmittel

- händische Lösungsverfahren
  - Einsetzverfahren (Substitutionsverfahren)
  - Formel zum direkten Bestimmen von x und y (2 Var)
  - Gauss-Elimination (bis max. 3 Var, "schöne" Koeff.)
- computerunterstütztes Lösen (Auswahl):
  - mit Arbeitsblatt PIVOT.XLS in Excel
  - Methoden der Matrizenrechnung (eindeutig lösb. LGS)
  - mit Excel-Solver (eindeutig lösbare LGS)
  - mit Computeralgebrasystemen (Mathematica, Derive...)

6.11 Händisches Lösen von kleinen LGS (max. 3x3)

6.11.1 Einsetzverfahren: z.B. sei gegeben

$$[1] \qquad 2x - y = 1$$
$$[2] \qquad x + y = 5$$

Man löst nun eine der beiden Gl. nach einer der Variablen auf und setzt in die andere Gleichung ein: z.B. [2] nach y auflösen liefert $y = 5-x$; dies in [1] eingesetzt liefert $2x - (5-x) = 1$ bzw. $x = 2$. Dies in [1] oder [2] eingesetzt liefert $y = 3$, also $(x;y) = (2;3)$.

6.11.2 Der Pivotschritt

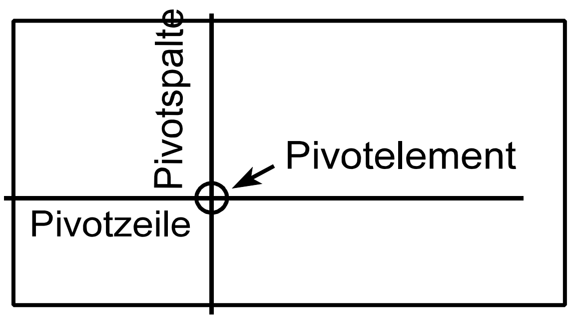
Hintergrund: Die Lösungsmenge eines LGS ändert durch folgende Schritte nicht:

a) eine Gleichung wird mit einer Zahl $\neq 0$ multipliziert
b) eine Gleichung wird durch Summe von 2 Gl. ersetzt
c) Schritte a) und b) beliebig kombiniert.

Ein **Pivotschritt** ist eine Kombination von Schritten a) und b) derart, dass

1) die Lösungsmenge des GLS sich nicht ändert.
2) eine Variable (Pivotvariable) verschwindet aus allen Gleichungen bis auf einer Gleichung (Pivotgleichung)
3) in dieser Gleichung hat die Variable nach dem Pivotieren den Koeffizienten 1.

In der Tableaudarstellung eines LGS besteht ein Pivotschritt darin, dass in eine bestimmte "Pivotspalte" ($\cong$Pivotvariable) des Tableaus an eine Stelle eine 1 und sonst lauter 0 kommen. Die Stelle innerhalb der Pivotspalte, wo nach dem Pivotieren die 1 hinkommt, heisst Pivotelement. Die Zeile (Gleichung) mit dem Pivotelement ist die Pivotzeile.



Pivotschritt rechentechnisch:

1) Wähle Pivotelement $\neq 0$ (vorteilhaft, wenn bereits $=1$)
2) Dividiere Pivotzeile durch Wert des Pivotelements $\Rightarrow$Pivotelement wird $=1$
3) Bringe alle anderen Elemente der Pivotspalte auf 0, indem jede Zeile mit einem entsprechenden Vielfachen der neuen Pivotzeile multipliziert und zur betreffenden Zeile addiert wird.

6.11.3 Gauß'scher Algorithmus (Pivotvariante):

1) Wiederhole so lange wie möglich (max. 1x pro Zeile):
   a) Wähle auf der linken Seite ein Pivotelem. $\neq 0$ aus.
   b) Führe für die entspr. Spalte einen Pivotschritt aus.

2) Das Verfahren endet, wenn einer dieser Fälle eintritt:
   a) Es tritt eine Gleichung der Form $0x+0y = a$ (alle Koeffizienten links sind = 0 und $a \neq 0$) auf. Dann ist das LGS unlösbar.
   b) Jede Spalte wurde genau ein mal pivotiert: Die eindeutige Lösung des LGS ist direkt ablesbar.
   c) $r>0$ Variablen wurden nicht pivotiert: das GLS besitzt einen r-dim. Teilraum als Lösungsmenge. Man beschreibt diesen Teilraum, indem man für jede nicht pivotierte Variable einen Parameter setzt und diese Parameter simultan variiert.

Bemerkungen:

- Eine einmal pivotierte Spalte ändert sich im Laufe der weiteren Rechnung nicht mehr!
- Gleichungen (Zeilen) der Form $0x + 0y + 0z = 0$ sind irrelevant und können weggelassen werden!
- Bei der Auswahl der Pivotelemente können manchmal Rechenvorteile ausgenützt werden. Am leichtesten ist das Pivotieren, wenn das Pivotelement vor dem Pivotieren bereits = 1 ist und/oder in der designierten Pivotspalte bereits möglichst viele Koeff. = 0 sind.
- In Excel kann man mit Hilfe des Arbeitsblattes PIVOT.XLS das Pivotieren automatisch erledigen. Bei jedem Tableau muss nur noch die Pivotspalte und die Pivotzeile gewählt werden (unter dem Tableau).

6.12 Pivotieren eines 3x3-Systems:

Gegeben sei:

$$
\begin{array}{lrcl}
[1] & 2x + y - 2z & = & 1 \\
[2] & x + 2y + 2z & = & 5 \\
[3] & -2x \quad\quad + z & = & -7
\end{array}
$$

bzw. als Tableau (Pivotzeilen bzw. Spalten sind grau unterlegt)

	Gleichung	x	y	z	RS	
1.	[1]	2	1	-2	1	
2.	[2]	1	2	2	5	
3.	[3]	-2	0	1	-7	
4.	[1'] = [1]/2	1	0,5	-1	0,5	·(-1) ·(2)
5.	[2'] = (-1)·[1'] + [2]	0	1,5	3	4,5	
6.	[3'] = 2·[1'] +[3]	0	1	-1	-6	
8.	[1"] = (-0,5)·[2"]+[1']	1	0	-2	-1	
9.	[2"] = [2']/1,5	0	1	2	3	·(-0,5) ·(-1)
7.	[3"] = (-1)·[2"]+[3']	0	0	-3	-9	
11.	[1'"] = (2)·[3"']+[1"]	1	0	0	5	
12.	[2'"] = (-2)·[3"']+[2"]	0	1	0	-3	
10.	[3'"] = [3"]/(-3)	0	0	1	3	·(-2) ·(2)

Aus dem letzten Tableau kann die eindeutige Lösung direkt abgelesen werden: x=5, y=-3; z=3.

6.12.1 Lösung mit Arbeitsblatt PIVOT

(in Datei MVO.XLS)

In B5:D7 kommt die Koeffizientenmatrix, in Spalte K die rechte Seite. Unter jedem Tableau werden die Pivotzeile und Pivotspalte (händisch) spezifiziert.

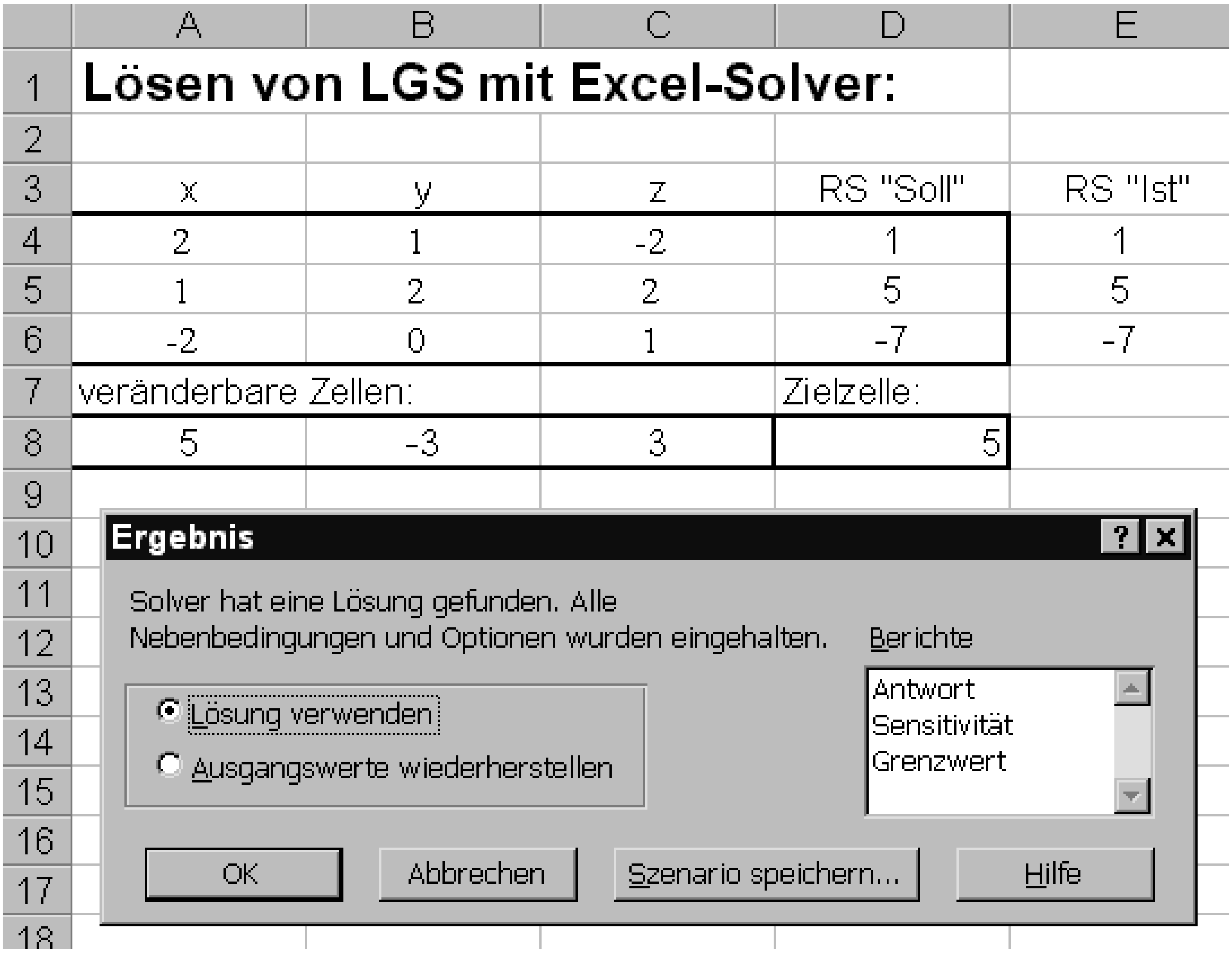
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**PIVOT: Pivotieren linearer Gleichungssysteme**										
2											
3	Spalte->	1	2	3	4	5	6	7	8	9	RS
4	TAB 1										
5	Z1	2	1	-2	0	0	0	0	0	0	1
6	Z2	1	2	2	0	0	0	0	0	0	5
7	Z3	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	-7
8	Z4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	Z5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10		Pivotsp:	1		Pivotzeile:		1				
11	TAB 2										
12	Z1	1	0,5	-1	0	0	0	0	0	0	0,5
13	Z2	0	1,5	3	0	0	0	0	0	0	4,5
14	Z3	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-6
15	Z4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	Z5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17		Pivotsp:	2		Pivotzeile:		2				
18	TAB 3										
19	Z1	1	0	-2	0	0	0	0	0	0	-1
20	Z2	0	1	2	0	0	0	0	0	0	3
21	Z3	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	-9
22	Z4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	Z5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24		Pivotsp:	3		Pivotzeile:		3				
25	TAB 4										
26	Z1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5
27	Z2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-3
28	Z3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3

6.12.2 Lösung mit Excel-Solver:

In die Zellen A4:C6 kommt die Koeffizientenmatrix, in die Zellen D4:D6 die rechte Seite des LGS. In die Zellen E4:E6 kommen Formeln, die angeben, welche Werte sich rechts ergeben, wenn x, y, z die in Zeile 8 spezifizierten Werte (hier zunächst 0, 1, 2) annehmen. Es muss dann noch eine “Zielzelle” spezifiziert werden (hier D8), in die eine beliebige Formel mit den veränderbaren Zellen einzutragen ist. (Die Zielzelle wird beim Solver-Lösen von linearen Optimierungsproblemen gebraucht). Wesentlich ist die Spezifikation der “Nebenbedingungen” $D$4:$D$6 = $E$4:$E$6. Damit wird der Solver angewiesen, für die Zellen A8:C8 solche Werte zu suchen, dass sich RS “Soll” = RS “Ist” ergibt.

	A	B	C	D	E
1	**Lösen von LGS mit Excel-Solver:**				
2					
3	x	y	z	RS "Soll"	RS "Ist"
4	2	1	-2	1	-3
5	1	2	2	5	6
6	-2	0	1	-7	2
7	veränderbare Zellen:			Zielzelle:	
8	0	1	2	3	

Nach dem Lösen zeigt der Solver folgendes Bild:



Mit den Werten x=5, y=-3 und z=3 in den veränderbaren Zellen wird erreicht, dass für alle drei Zeilen (Gleichungen) RS “Soll” = RS “Ist” wird. Damit hat der Solver die (eindeutige) Lösung dieses LGS gefunden.

Fazit: der Solver ist zwar leistungsfähig, aber gewöhnungsbedürftig. Zur Berechnung von RS “Ist” müssen einige Formeln eingegeben werden. Ganz von selbst geht das Lösen von LGS auch mit dem Solver nicht, vermutlich ist man mit dem Blatt PIVOT sogar schneller.

Vorlesung Angew. Mathematik für BWL
7.Woche

7.1 Matrizen und Vektoren: Begriffsdefinitionen

mxn - Matrix: rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten (n,m: Dimension v. Mat.)
mx1 - Matrix: Spaltenvektor
1xn - Matrix: Zeilenvektor

z.B. 2x3-Matrix: A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ mit 2 Zeilen und 3 Spalten.

1x3 - Zeilenvektor $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, 2x1 - Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$

Transponierte einer mxn - Matrix: Zeilen und Spalten werden vertauscht, Ergebnis ist eine nxm-Matrix. Z.B.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ d.h. aus Zeile 1 wird die Spalte 1, aus der Zeile 2 die Spalte 2 ... und umgekehrt.

nxn - Matrizen heissen quadratisch. Matrizen mit $A = A^T$ heissen symmetrisch. Symmetrische Matrizen sind stets quadratisch.

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl: erfolgt elementweise.

Summe von 2 Matrizen: komponentenweise. Voraussetzung: Beide Mat. haben gleiche Dimension.

$$B: \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} 2 & 8 \\ 7 & 9 \\ 10 & -4 \\ 6 & 4 \end{matrix}}$$

$2=1x2+0x3+2x0$

$9=2x4+1x1+0x2$

usw.

A x B: Zeile x Spalte

7.2 Multiplikation von zwei Matrizen:

Man kann eine kxm-Matrix A mit einer mxn-Matrix B multiplizieren und erhält dabei eine kxn-Matrix.

- die erste Matrix hat gleich viele Spalten wie die zweite Matrix Zeilen
- Die Ergebnismatrix hat gleich viele Zeilen wie die erste Matrix und gleich viele Spalten wie die zweite Matrix.
- Matrizenmultiplikation ist i.a. nicht kommutativ. $A*B \neq B*A$
- Berechnung: mit *Schema von Falk*

Bem: man kann B auch unter AxB anschreiben.
Falls A nicht gleich viele Spalten wie B Zeilen hat, ist Matrixmultiplikation nicht definiert.

7.3 Invertieren von nxn - Matrizen:

Einheitsmatrix: quadratische Matrix, die in der Hauptdiagonale lauter 1er und sonst nur 0 enthält.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Idee der Inversen Matrix:

Gegeben sei eine quadratische nxn -Matrix A. Gesucht eine Matrix A^{-1} derart, dass das Produkt $A \times A^{-1} = E_n$.

Achtung! Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar!Matrizen mit Determinante=0 (singuläre Matrizen) besitzen keine Inverse! (Auch die Zahl 0 besitzt keinen Kehrwert)

7.3.1 Händisches Invertieren von Matrizen

Man schreibe im Gauss-Verfahren in (Pivot-Variante) als linke Seite die zu invertierende Matrix A und als rechte Seite nicht nur eine Spalte, sondern eine ganze Einheitsmatrix hin (n Spalten). Anschliessend pivotiert man die Hauptdiagonalemente von A solange, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Dann steht rechts die Inverse A^{-1} der Matrix A

Beispiel:

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ Dann ist die dazu Inverse

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -9 & -2 \\ -4 & 6 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (Probe durch Ausmultiplizieren)

	Orig. Matrix			Einheitsmatrix			wie berechnet?
[1.]	2	1	3	1	0	0	
[2.]	1	1	1	0	1	0	
[3.]	2	-1	6	0	0	1	
[4.]	1	0,5	1,5	0,5	0	0	=[1.]/2
[5.]	0	0,5	-0,5	-0,5	1	0	=(-1)*[4.]+[2.]
[6.]	0	-2	3	-1	0	1	=(-2)*[4.]+[3.]
[7.]	1	0	2	1	-1	0	=(-0,5)*[8.]+[4.]
[8.]	0	1	-1	-1	2	0	=[5.]/0,5
[9.]	0	0	1	-3	4	1	=2*[8.] + [6.]
[10.]	1	0	0	7	-9	-2	=(-2)*[12.]+[7.]
[11.]	0	1	0	-4	6	1	=[12.]+[8.]
[12.]	0	0	1	-3	4	1	=[9.]
	Einheitsmatrix			Inverse Matr.			

7.3.2 Matrixinvertieren mit Excel:

- Entweder mit Arbeitsblatt PIVOT.XLS (max. 5x5):
  Originalmatrix und Einheitsmatrix links in 1. Tableau eintragen; Pivotelemente händisch wählen. Alle Tableaus können abgelesen werden. (Siehe Tabelle PIVOT in Datei MVO.XLS.)
- oder mit Arrayfunktion MINV:

– markieren Sie den quadrat. Bereich, in den A^{-1} kommen soll;
– geben Sie =MINV(A) ein (für A Bereich mit Matrix A angeben!)
– schließen Sie mit [Strg][Shift][Enter] (alle 3 Tasten gleichzeitig!) ab! (sehr wichtig!)

7.4 Matrixdarstellung von lin. Gleichungssystemen:

Das eindeutig lösbare 2x2 - System

$$2x - y = 1$$
$$x + y = 5$$

hat die Matrixform $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

bzw. $A \times X = B$

mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Man kann nun $A \times X = B$ folgend umformen:

$$\begin{aligned} A \times X &= B && \mid A^{-1} \\ A^{-1} \times A \times X &= A^{-1} \times B && \mid A^{-1} \times A = E \\ E \times X &= A^{-1} \times B && \mid E \times X = X \\ X &= A^{-1} \times B \end{aligned}$$

Man erhält also die Lösung des Systems $A \times X = B$, indem man den Vektor B (die rechte Seite) mit der Inversen der Koeffizientenmatrix A multipliziert.
Die Voraussetzung dafür ist, dass wir ein eindeutig lösbares LGS vorliegen haben. Bei eindeutig lösbaren LGS ist die Koeffizientenmatrix immer invertierbar.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und damit

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ d.h. x=2 und y=3 lösen obiges 2x2 - LGS.

7.5 Lösen von LGS mit Excel

In Excel stehen Ihnen mehrere Möglichkeiten zur Lösung von LGS offen, die unterschiedliche Vor- und Nachteile aufweisen:

7.5.1 Mit dem Excel-Solver

+ leistungsfähiges und elegantes Werkzeug - wenn man es zur Verfügung hat und auch richtig beherrscht!
– Die Eingabetechnik ist gewöhnungsbedürftig.
– nur für eindeutig lösbare LGS gut geeignet. Bei Parameterlsg. liefert der Solver die triviale Nullösung, bei leerer Lösungsmenge liefert nichts brauchbares.

7.5.2 Mit Matrizenfunktionen

+ man kommt mit Standardfunktionen (MINV bzw. MMULT ohne Solver-Spezialkenntnisse aus.
+ diese Methode funktioniert auch mit älteren Kalkulationsprogrammen ohne Solver-Funktion (Lotus, As-Easy, ..)
– Nur für eindeutig lösbare LGS geeignet.

7.5.3 mit Tabelle PIVOT.XLS:

+ volle Kontrolle über jeden Pivotschritt (wie beim händischen Rechnen)
+ auch Sonderfälle (keine Lsg, Parameterlsg.) erkennbar
+ kann auch (nach Formatumwandlung) mit einfacheren Kalkulationsprogrammen benutzt werden.
– Man muss die Logik des händischen Pivotierens kennen, um das Blatt richtig bedienen zu können
– max 5x9 LGS lösbar.

7.6 Wirtschaftliche Anwendungen von LGS

LGS dienen zur Lösung verschiedener ökonomischer Fragestellungen. Der Schlüssel für den Erfolg liegt in folgenden Fragen: Welche Sachbedeutung haben die einzelnen Variablen, welche Sachbedeutung haben die einzelnen Gleichungen?
Wir behandeln folgende Anwendungsfälle:
- innerbetriebl. Leistungsverrechnung (Simultanansatz)
- Teilebedarfsrechnung (Stücklistenproblem)
- Input-Output-Analyse (Leontief-Modelle)

Vorgangsweise bei Anwendungen von LGS:

Erfahrungsgemäß passieren die meisten Fehler beim Anwenden von LGS bereits beim Aufstellen der Gleichungen noch vor dem Lösen des GLS (in der ersten Phase der Modellierung!) Halten Sie sich genau an die hier angegebene Reihenfolge!

0) Veranschaulichung und ihrer Beziehnungen zueinander durch Knoten-Kanten-Graph. Damit erhalten Sie einen Überblick über das Sachproblem.
1) Welche Gleichheitsbeziehungen gelten? Dies ist für jeden Typ von Problem immer gleich.
2) Welche Variablen benötige ich zum Anschreiben der Beziehungen in 1)? Welche Sachbedeutung haben die Variablen? Denken Sie an das Studenten-Professoren-Beispiel!
3) Aufstellen der Gleichungen gem. 1) und 2)
4) Lösen des Gleichungssystems (eindeutig lösbar?) inkl. Probe! Die meisten Aufgabentypen sind eindeutig lösbar (Ausnahme: geschlossenes Leontief-Modell).
5) Interpretation der Lösung für das Sachproblem

7.7 Innerbetriebliche Leistungsverrechnung (Simultanansatz)

Innerbetrieblich ausgetauschte Leistungen sollen kostenrechnerisch derart bewertet werden, dass innerhalb einer Verrechnungsperiode **für jede Kostenstelle** gilt:

Produktionswert = eigene Kosten+Wert des Erhaltenen
bzw.
Gesamtkosten = primäre Kosten + sekundäre Kosten

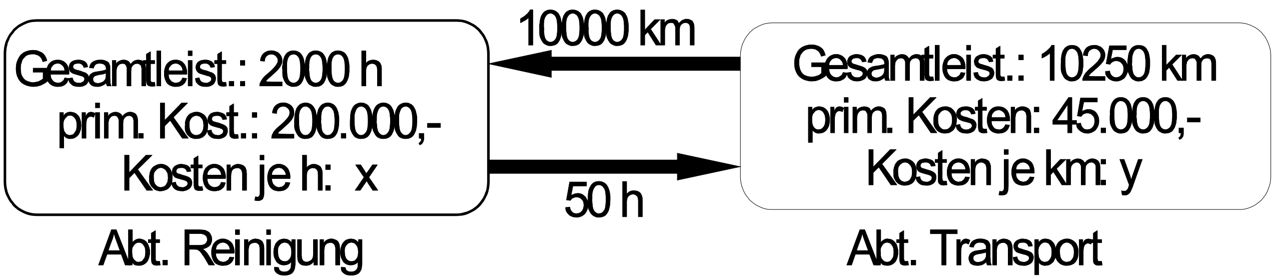
Der Simultanansatz löst auch solche Verrechnungsaufgabenexakt, bei denen Leistungen kreisförmig ausgetauscht werden und man durch Umlageverfahren nur Näherungslösungen erzielen kann.

Jede Variable gibt die (zu ermittelnden) internen Verrechnungskosten je Leistungseinheit für die betreffende Abteilung (Hilfsbetrieb) an. Damit lassen sich für jede Abteilung die o.a. Gleichheitsbeziehungen in Form von linearen Gleichungen aufstellen. Dies liefert bei n Abteilungen ein (i.a. eindeutig lösbares) n x n - Gleichungssystem.

Durch Lösen dieses LGS erhält man für jede Abteilung die Verrechnungswerte je Leistungseinheit.

7.7.1 Beispiel:Gebäudereinigung mit 2 Abteilungen:

Reinigung und Transport (zu den Reinigungsobjekten)



2) Bedeutung der Variablen:

x: interner Verrechnungswert je Reinigungsstunde
y: interner Verrechnungswert je Transp.-km

3) Aufstellen der Gleichungen:

Bedingung: GesamtKo =.prim. Kost. + sekund. Kosten

Rein: $2\,000\,x = 200\,000 + 10\,000\,y$ [1]
Transp: $10250y = 45\,000 + 50\,x$ [2]

Dabei bedeuten in der ersten Gleichung:
2000x : int. Verrechnungswert von 2000 Arbeitsstunden
200000: Primäre Kosten der Abt. Reinigung
10000y: sekund. Kosten für 10000 Transportkilometer

4) Lösen des Gleichungssystems liefert

$x = 125$ bzw. $y = 5$.

5) D.h. Es sind für die innerbetriebliche Leistungsverrechnung je Reinigungsstunde ÖS 125,- und je Transportkilometer ÖS 5,- anzusetzen. Bei diesen Verrechnungswerten sind die geforderten Gleichgewichtsbeziehungen [1] und [2] exakt erfüllt.

7.7.2 Leistungsverrechnung bei 3 Hilfsbetrieben

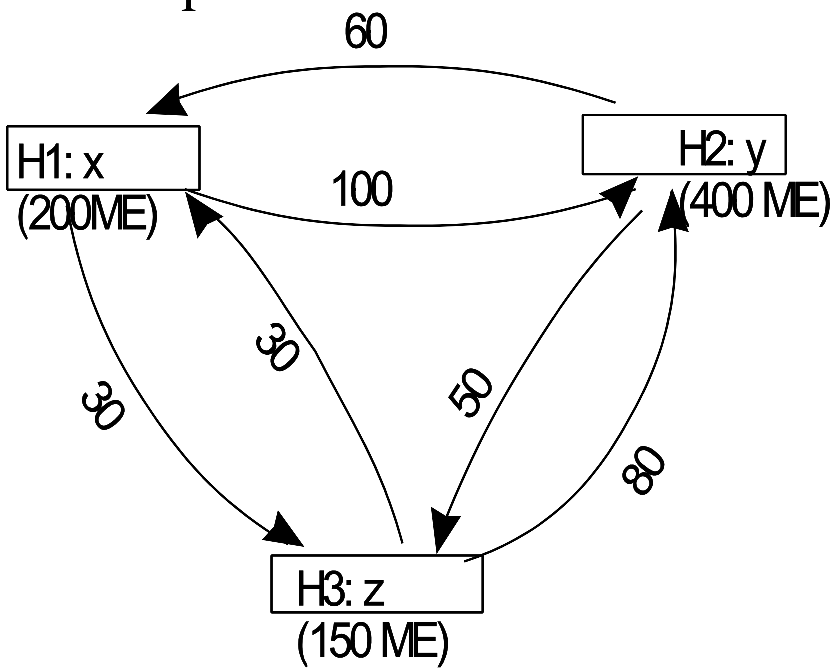
Es gibt zwei tabellarische Angabemöglichkeiten: Varianten “Liefert an” bzw. ”Erhält von” (bitte bei Prüfungsangaben beachten, welche Variante vorliegt!):

Hilfs-betrieb	liefert an[1)] H_1	H_2	H_3	Gesamt-produktion	primäre Kosten
H_1	-	100	30	200 ME	70 GE
H_2	60	-	50	400 ME	500 GE
H_3	30	80	-	150 ME	300 GE

[1)] jeweils Mengeneinheiten (ME)

Hilfs-betrieb	erhält von[1)] H_1	H_2	H_3	Gesamt-produktion	primäre Kosten
H_1	-	60	30	200 ME	70 GE
H_2	100	-	80	400 ME	500 GE
H_3	30	50	-	150 ME	300 GE

Knoten-Kanten-Graph dazu:



Sachbedeutung der Variablen:
x: zu ermittelnder Verrechnungswert je ME in Hilfsbetrieb H1
y: zu ermittelnder Verrechnungswert je ME in Hilfsbetrieb H2
z: zu ermittelnder Verrechnungswert je ME in Hilfsbetrieb H3.

Das Aufstellen der Gleichungen erfolgt für jeden Hilfsbetrieb nach dem Prinzip:
Gesamtkosten = primäre Kosten + Wert des Erhaltenen

$$
\begin{array}{llcllll}
H1: & 200\,x & = & 70 & & +\ 60y & +\ 30\,z \\
H2: & 400\,y & = & 500 & +\ 100x & & +\ 80\,z \\
H3: & 150\,z & = & 300 & +\ 30\,x & +\ 50y &
\end{array}
$$

bzw. umgeformt:

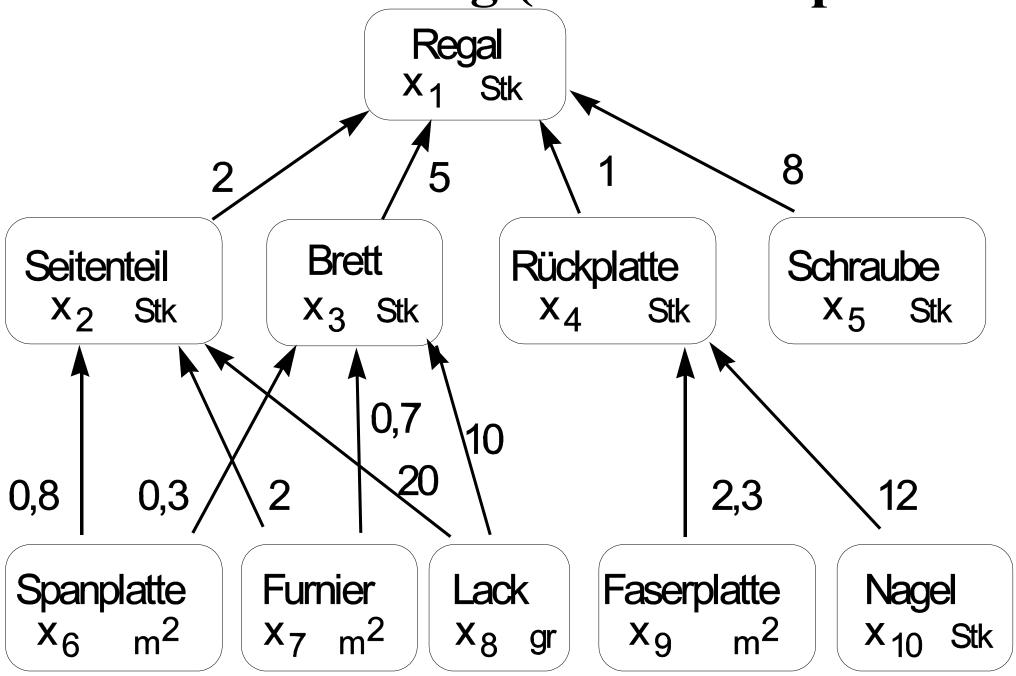
$$
\begin{array}{lrrrcr}
H1: & 200x & -\ 60y & -\ 30z & = & 70 \\
H2: & -100x & +\ 400y & -\ 80z & = & 500 \\
H3: & -30x & -\ 50y & +\ 150z & = & 300
\end{array}
$$

Achtung! Die Koeffizientenmatrix dieses LGS kann weitestgehend (bis auf die Hauptdiagonale und die Vorzeichen) aus der "Erhält von"-Matrix ohne Transponieren direkt abgelesen werden, nicht jedoch aus der "Liefert an" - Matrix!

Lösung:
x: Verr. Wert je ME H1: $x = 1{,}47..$ GE
y: Verr. Wert je ME H2: $y = 2{,}22..$ GE
z: Verr. Wert je ME H3: $z = 3{,}03..$ GE

Vorlesung Angew. Mathematik für BWL
8.Woche

8.1 Teilebedarfsrechnung (Stücklistenproblem):



Teilebedarf für ein Regal
dargestellt als Gozintograph

Produktbez.	Ein-heit	Bedarf ges.	extern	Zur Herstellung einer Einheit werden benötigt:
Regal	Stk	x_1	10 Stk.	2 Seitenteile; 5 Bretter; 1 Rückpl.; 8 Schr.
Seitenteil	Stk	x_2	0	0,8 m_2 Spanplatte; 2 m_2 Furnier; 20 g Lack
Brett	Stk	x_3	10 Stk	0,3 m_2 Spanpl.; 0,7 m_2 Furnier; 10 g Lack
Rückplatte	Stk	x_4	0	2,3 m_2 Faserplatte; 12 Nägel
Schraube	Stk	x_5	20 Stk	
Spanplatte	m_2	x_6	0	
Furnier	m_2	x_7	0	
Lack	gr	x_8	0	
Faserplatte	m_2	x_9	0	
Nagel	Stk	x_{10}	30 Stk	

Stücklistentabelle mit vorgeordneten Produkten

Produktbez.	Einheit	Bedarf ges.	Bedarf extern	Produkt wird in folgender Menge für nachgeordnete Produkte benötigt:
Regal	Stk	x_1	10 Stk	
Seitenteil	Stk	x_2	0	2 Stück pro Regal
Brett	Stk	x_3	30 Stk	5 Stück pro Regal
Rückplatte	Stk	x_4	0	1 Stück pro Regal
Schraube	Stk	x_5	20 Stk	8 Stück pro Regal
Spanplatte	m_2	x_6	0	0,8 m2 pro Seitenteil; 0,3 m2 pro Brett
Furnier	m_2	x_7	0	2 m2 pro Seitenteil; 0,7 m2 pro Brett
Lack	gr	x_8	0	20 g pro Seitenteil; 10 g pro Brett
Faserpl.	m_2	x_9	0	2,3 m2 pro Rückplatte
Nagel	Stk	x_{10}	30 Stk	12 Stück pro Rückplatte

Tabelle mit nachgeordneten Produkten

Gleichungsdarstellung:
x_1: Anzahl Regale; x_2: Anzahl Seitenteile;
x_3: Anzahl Bretter; x_4: Anz. Rückplatten usw.

Gesamtbedarf = extrener Bedarf + interner Bedarf

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Regal:} & x_1 & = n_1 & & & & \\
\text{Seitenteil:} & x_2 & = n_2 & + 2x_1 & & & \\
\text{Brett:} & x_3 & = n_3 & + 5x_1 & & & \\
\text{Rückplatte:} & x_4 & = n_4 & + x_1 & & & \\
\text{Schraube:} & x_5 & = n_5 & + 8x_1 & & & \\
\text{Spanplatte:} & x_6 & = n_6 & & + 0{,}8x_2 & + 0{,}3x_3 & \\
\text{Furnier:} & x_7 & = n_7 & & + 2x_2 & + 0{,}7x_3 & \\
\text{Lack:} & x_8 & = n_8 & & + 20x_2 & + 10x_3 & \\
\text{Faserplatte:} & x_9 & = n_9 & & & & + 2{,}3x_4 \\
\text{Nagel:} & x_{10} & = n_{10} & & & & + 12x_4
\end{array}
$$

Entspricht der Tabelle der **nachgeordneten** Produkte!

Lösung:

$$
\begin{array}{llrlllll}
 & & & 10 & 20 & 80 & 10 & \\
\text{Regal:} & x_1 = & 10 & & & & & \\
\text{Seitenteil:} & x_2 = & 0 & + 2x_1 & & & & = 20 \\
\text{Brett:} & x_3 = & 30 & + 5x_1 & & & & = 80 \\
\text{Rückplatte:} & x_4 = & 0 & + x_1 & & & & = 10 \\
\text{Schraube:} & x_5 = & 20 & + 8x_1 & & & & = 100 \\
\text{Spanplatte:} & x_6 = & 0 & & + 0{,}8x_2 & + 0{,}3x_3 & & = 40 \\
\text{Furnier:} & x_7 = & 0 & & + 2\,x_2 & + 0{,}7x_3 & & = 96 \\
\text{Lack:} & x_8 = & 0 & & + 20x_2 & + 10x_3 & & =1200 \\
\text{Faserplatte:} & x_9 = & 0 & & & & + 2{,}3x_4 & = 23 \\
\text{Nagel:} & x_{10}= & 30 & & & & + 12\,x_4 & = 150
\end{array}
$$

Man kann diesen Typ LGS durch sukzessives Einsetzen ohne weiteres Umformen (Gauß, Matrizeninv., Solver...) lösen!

Achtung! Standardfehler beim Aufstellen des LGS zum Stücklistenproblem: Sie dürfen **keinesfalls** die Gleichungen folgend aufstellen:

$x_1 = 2x_2 + 5x_3 + 1x_4 + 8x_5$ usw. DAS IST FALSCH!!!!

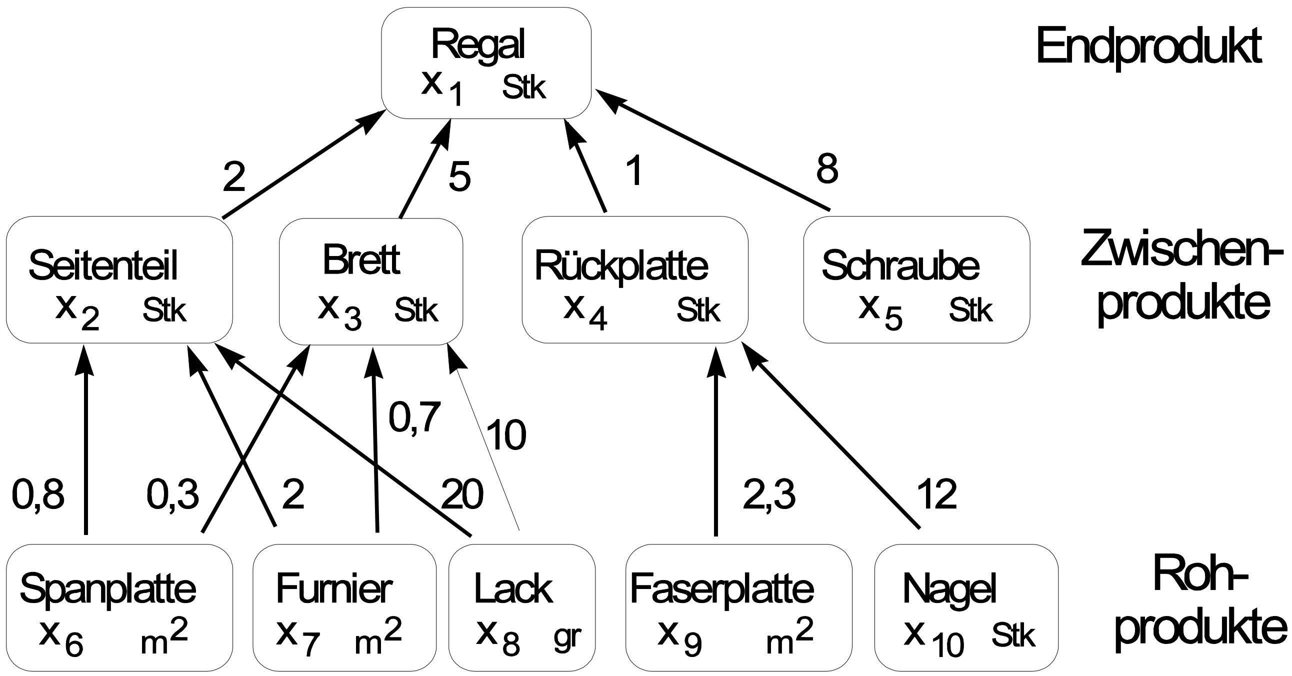
etwa gemäß der Überlegung: ein Regal (x_1) besteht aus 2 Seitenteilen (x_2), 5 Brettern (x_3), einer Rückwand (x_4) und 8 Schrauben (x_5). Diese Überlegung ist vollkommen verkehrt, weil x_1 nicht ein Regal, sondern die Anzahl der herzustellenden Regale ist. Genauso ist x_2 nicht ein Seitenteil, sondern die Anzahl der zu produzierenden Seitenteile usw. (vgl. Studenten-Professoren-Aufgabe!)

8.2 Materialverflechtung:

ist ein Sonderfall der Teilebedarfsrechnung

Rohprodukte (R) ➜ Zwi-Pr.(Z) ➜ Endprod. (E)

Übergänge A: R ➜ Z bzw. B: Z ➜ E werden durch I-O Matrizen A,B beschrieben. Das Matrizenprodukt A·B beschreibt dann den Teilebedarf an Rohprodukten für Endprodukt.



Beispiel:

Matrix A: R➜Z:

Rohpr.↓	Seitt.	Brett	RPl	Schr.
Sp.pl. 0,8	0,3	0	0	
Furníer	2	0,7	0	0
Lack	20	10	0	0
Faserpl.	0	0	2,3	0
Nagel 0	0	12	0	

Matrix B: Z ➜ R

ZwiPr.↓	Regal
Seitent.	2
Brett	5
Rückpl.	1
Schraube	8

A x B = $(3{,}1; 7{,}7; 90; 2{,}3; 12)^T$

D.h: pro Regal benötigt man $3{,}1m^2$ Spanplatte; $7{,}7m^2$ Furnier; 90g Lack; $2{,}3m^2$ Faserplatte; 12 Nägel.

8.3 Input-Output-Modelle (Leontief-Modelle)

Idee: Wieviel müssen die einzelnen Sektoren einer Volkswirtschaft produzieren, daß sowohl der *interne Bedarf* (für andere Sektoren) wie auch der *externe Bedarf* (außerhalb des betrachteten Modells benötigte Bedarf) gedeckt ist?

Offenes Leontief-Modell: externer Bedarf ≠ 0. Die Lösung eines offenen Leontief-Modells ist i.a. eindeutig. Bedeutung der Variablen: Gesamtproduktionsmenge je Sektor (ähnlich wie bei Teilebedarfsrechnung).

Geschlossenes Leontief-Modell: externer Bedarf = 0 (Parameterlösung mit 1 Parameter; eindeutige Lösung durch Zusatzbedingung)
Bedeutung der Variablen: Verrechnungswerte je Leistungseinheit für jeden Sektor (ähnlich wie bei der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung)

Leontief-Modelle lassen sich folgend darstellen:
- Input-Output-Graphen bzw. Gozintographen
- lineare Gleichungssysteme
- Input-Output-Matrizen

8.3.1 Offenes Leontief-Modell:

primitive Nationalökonomie mit 2 Sektoren:

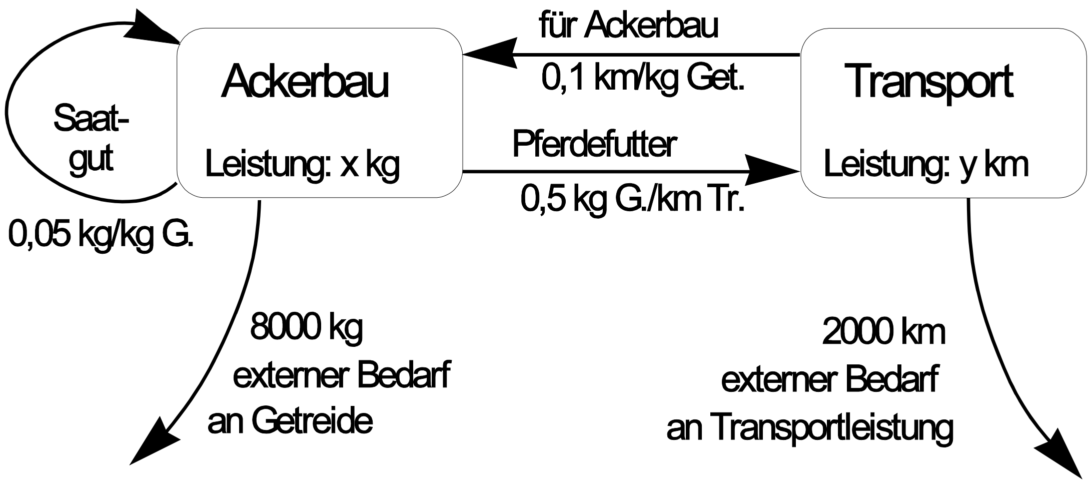


Abbildung20 Primitive Nationalökonomie - Input-Output-Graph

externe Bedarf Getreide: Ernährung der Menschen
externer Transportbedarf: Ausreiten, Jagd, Krieg, etc.

Gleichgewichtsbedingung:

Sektor:	Gesamtbedarf	=	externer	+ interner Bedarf
Ackerbau:	x	=	8.000	+ 0,05x + 0,5y
Transport:	y	=	2.000	+ 0,1 x

bzw. umgeformt:

$$0{,}95\,x - 0{,}5y = 8000$$
$$-0{,}1x + y = 2000$$

Das Gleichungssystem besitzt die eindeutige Lösung:

x= 10000 kg Getreide
y= 3000. km Transport

um int. + ext. Bed. zu decken.

8.3.2 Input-Output-Matrizen

Mit Hilfe von Input-Output-Matrizen (I-O-Matrizen) können die wechselsseitigen wirtschaftlichen Abhängigkeiten zwischen den Sektoren einer Volkswirtschaft beschrieben werden. Eine I-O-Matrix gibt an, wieviel Leistungseinheiten von einem Sektor für jede Leistungseinheit eines anderen Sektors bereitstellen muss, damit insgesamt der interne Bedarf der Volkswirtschaft gedeckt wird. Konstruktionsprinzip: Von Zeile an Spalte. Aus der I-O-Matrix und dem externen Bedarf kann unmittelbar ein offenes Leontief-Modell aufgestellt und gelöst werden.

Im letzten Beispiel lautet die I-O-Matrix A: $\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$;

das LGS hat insgesamt die Matrixgestalt: $X = B + A \times X$ bzw. umgeformt $(E-A) \times X = B$

mit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$; E: Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Vektorgleichung $(E-A) \times X = B$ besitzt die eindeutige Lösung $X = (E-A)^{-1} \times B$. Man muss also die sogenannte **Leontief-Inverse** $(E-A)^{-1}$ der I-O-Matrix A mit dem externen Bedarf B multiplizieren, um den Gesamtbedarf X an Leistungseinheiten für alle Sektoren der Volkswirtschaft zu erhalten.

Beachte:

- Die Leontief-Inverse ist nicht die Inverse der I-O-Matrix A, sondern die Inverse der Matrix (E-A).
- Die Berechnung von offenen Leontief-Modellen mittels Leontief-Inverser ist besonders dann vorteilhaft, wenn verschiedene rechte Seiten (z.B.mehrere Jahre) bei gleicher I-O-Matrix durchzurechnen sind (siehe folgendes Beispiel).

Man kann in unserem Beispiel das Gleichungssystem folgend in Matrixform darstellen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X = B + A \times X \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

$$(E - A) \times X = B$$

Man erhält die eindeutige Lösung dieses LGS, indem man die rechte Seite mit der Inversen von (E-A) multipliziert:

$$(E\text{-}A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}11111 & 0{,}55556 \\ 0.11111 & 1.05556 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 9.5 \end{pmatrix} \text{ und damit}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E\text{-}A)^{-1} \times B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 9.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Ändert sich (in einem neuen Jahr) der externe Bedarf B (bei gleichbleibender Struktur der Nationalökonomie; d.h. die I-O Matrix A und damit auch die Matrizen (E-A) sowie die Leontief-Inverse $(E\text{-}A)^{-1}$ bleiben unverändert), dann erhält man den neuen Gesamtbedarf sofort, indem man $(E\text{-}A)^{-1}$ mit dem neuen B multipliziert: sei z.B.

$B_{neu} = \begin{pmatrix} 7300 \\ 2500 \end{pmatrix}$, dann ergibt dies einen Gesamtbedarf

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E\text{-}A)^{-1} \times B_{neu} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 9.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7300 \\ 2500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9500 \\ 3450 \end{pmatrix}$$

8.3.3 Geschlossenes Leontief-Modell:

ähnlich wie innerbetr. Leistungsverr., ext. Bedarf = 0!

Beispiel:

Gemüsebauer (G), Obstbauer (O) und Weinbauer (W) tauschen gegenseitig Leistungen (ohne Bezahlung) aus.

	an G	an O	an W	Wert je ME
von G	-	70kg	80 kg	kg Gemüse: x
von O	60 kg	-	40 kg	kg Obst: y
von W	210 l	82 l	-	l Wein: z

Gleichgewichtsbed:

Wert des Gelief. = Wert des Erhaltenen

Gemüsebauer: $150\,x = 60y + 210z$
Obstbauer: $100\,y = 70x + 82z$
Weinbauer: $292\,z = 80x + 40y$ bzw.

	x	y	z	RS
Gemüse Obst Wein	150 -70 -80	-60 100 -40	-210 -82 292	0 0 0
Gemüse Obst Wein	1 0 0	-0,4 72 -72	-1,4 -180 180	0 0 0
Gemüse Obst Wein	1 0 0	0 1 0	-2,4 -2,5 0	0 0 0

Gem: $x - 2{,}4\,z = 0$
Obst: $y - 2{,}5\,z = 0$

Parameter-Lösg: Setze z = t; dann ist x=2,4t; y = 2,5t;

Zusatzannahme: Obstbauer setzt 1 kg Obst = 25 ÖS ➜

y = 2,5t = 25 ÖS ➜ z = t = 10 ÖS; x = 2,4t = 24 ÖS.