

**Günther Ossimitz**

**Vorlesung  
“Ang. Mathematik für Betriebswirte”**

**Vorlesungsfolien Wochen 9 und 10**

# Vorlesung Angew. Mathematik für BWL

## 9. Woche

### 9.1 Lineare Ungleichungen

wie lineare Gleichungen, nur mit einem der folgenden Ungleichheitszeichen:

"<" : "kleiner als"

"≤" : "kleiner oder gleich" (auch "≤")

">" : "größer als"

"≥" : "größer oder gleich" (auch "≥")

Beispiele für Ungleichungen sind etwa:

$$x_1 + 2x_2 \leq 7;$$

$$x - y + 2z > -9.$$

Ungleichungen können genauso wie Gleichungen umgeformt werden.

Lediglich wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer Zahl  $< 0$  multipliziert (dividiert) werden,

kehrt sich das Ungleichheitszeichen um: aus "<" wird ">" (und umgekehrt); aus "≤" wird "≥" (und umgekehrt). Bei Multiplikation mit einer Zahl  $a$  sind also die beiden Fälle  $a > 0$  und  $a < 0$  zu unterscheiden!

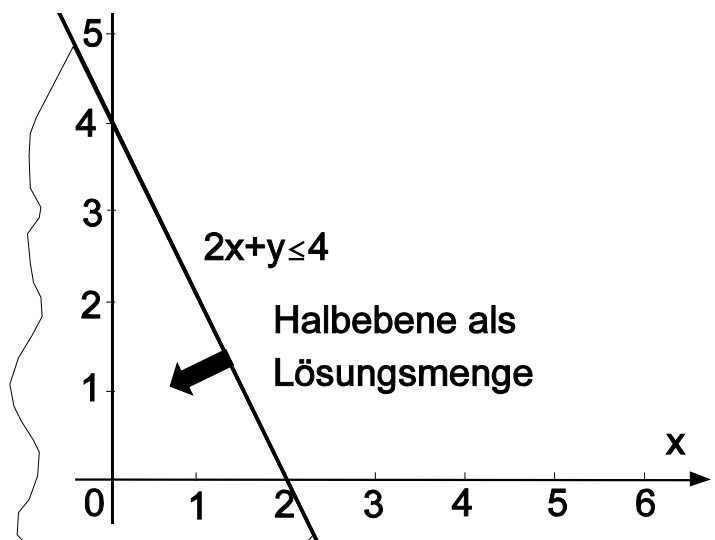


Abb. 1 Ungleichung  $2x + y \leq 4$

Die Lösungsmenge einer lin. Ugl. hängt eng mit der Lösungsmenge der entsprechenden lin. Gl. zusammen.

## 9.2 Lineare Ungleichungssysteme (LUGS)

Ein lineares Ungleichungssystem ist eine Zusammenfassung von linearen Ungleichungen. Die Lösungsmenge eines LUGS ist analog wie bei LGS der Durchschnitt aller Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen.

### 9.2.1 Aufstellen von LUGS:

Ein Bauer hat 30 ha Land, die er mit Weizen, Zuckerrüben oder Mais bebauen kann. Pro ha erfordert der Weizen einen Arbeitseinsatz von 20h, die Zuckerrüben von 50h und der Mais von 30h. Insgesamt stehen 1000 Arbeitsstunden zur Verfügung. Zur Deckung des Eigenbedarfs muß er mindestens 10 ha Mais anbauen. Der Maissilo faßt die Ernte von höchstens 25 ha Mais. Aus steuerlichen Gründen müssen mindestens 60% der Gesamtfläche bebaut werden. Stellen Sie diese Situation durch ein lineares Unleichungssystem dar!

Variablen:

$x_1$ : Anbaufläche Weizen (in ha);

$x_2$ : Anbaufläche Zuckerrüben (in ha);

$x_3$ : Anbaufläche Mais (in ha).

Landbeschränkung:  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$

Arbeitszeitbeschränk.:  $20x_1 + 50x_2 + 30x_3 \leq 1000$

Mindestmenge Mais:  $x_3 \geq 10$

Höchstmenge Mais:  $x_3 \leq 25$

60% Mindestanbaufl.:  $x_1 + x_2 + x_3 \geq 18$

Nichtnegativitätsbedingungen:  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ )

## 9.3 Optimierungsverfahren

### A) Lineare Optimierung:

- 1) Graphische Verfahren (für max. zwei Variable)
- 2) Simplex-Verfahren (mit vielen Varianten)
- 3) Spezialverfahren (z.B. für Transportprobleme, Zuordnungsprobleme, usw.)

### B) Nichtlineare Optimierung

Bei der **linearen Optimierung** sind alle auftretenden Gleichungen linear. Typische Beispiele **nichtlinearer Optimierung** sind Extremwertaufgaben der Differentialrechnung; in der Wirtschaftstheorie etwa die klassische Losgrößenformel (Bestellmengenformel).

### Generell besteht ein Optimierungsmodell aus:

- **Variablen**, beschreiben zu opt. Größen, dienen zur Formulierung von Zielfunktion (ZF) und Nebenbedingungen (NB, s.u.)
- **Restriktionen (Nebenbedingungen, NB)** geben an, welche Kombinationen von Variablenwerten zulässig sind und welche nicht. NB grenzen den zulässigen Bereich an sachlogisch erlaubten Werten ab.
- **Zielfunktion (ZF)**: beschreibt, wie aus den Variablen die zu optimierende Größe (Zielgröße) ermittelt werden kann. Gesucht ist bei einem Optimierungsproblem diejenige Variablenkombination, die
  - a.) alle Nebenbedingungen erfüllt und
  - b.) in die Zielfunktion eingesetzt einen möglichst großen (kleinen) Wert ergibt (d.h. den Punkt im zulässigen Bereich mit dem opt. ZF-Wert.)

## 9.4 Lineare Optimierungsprobleme in Normalform

Lineare Optimierungsprobleme in **Normalform**<sup>1</sup> sind Probleme, die folgende Bedingungen erfüllen:

- alle Variablen sind  $\geq 0$
- alle NB sind " $\leq$ " ("höchstens") Bedingungen
- die Zielgröße ist zu maximieren.

Viele lineare Optimierungsaufgaben lassen sich (durch vielfältige Tricks, auf die wir in diesem Lehrgang nicht näher eingehen) auf Normalform bringen. Wir werden hier nur lineare Optimierungsprobleme behandeln, die bereits in Normalform vorliegen. Das Ackerbauproblem in 9.2.1 hat keine Normalform, weil auch " $\geq$ " Bedingungen vorkommen. Es fehlt dort überdies noch eine Zielfunktion.

Wir behandeln zwei Lösungsverfahren:

- **graphisches Lösen** (für Probleme mit 2 Variablen)
- **Simplex-Verfahren** (allg. Lösungsverfahren für beliebige Probleme in Normalform). Das Simplex-Verfahren ist ein mathematisch geniales Verfahren, das erst um 1945 (gleichzeitig mit dem Aufkommen der ersten Computer!) von George Dantzig entwickelt wurde und heute in vielerlei Varianten theoretisch durchforscht und auch für eine Vielzahl von Optimierungsaufgaben praktisch einsetzbar vorliegt. (Lineare) Optimierung in der Praxis erfolgt praktisch ausschließlich in Kooperation Betriebswirt - Mathematiker (nicht vom Betriebswirt "do-it-yourself").

Das Simplexverfahren basiert auf Idee, das lineare Optimierungsproblem zunächst durch ein LUGS darzustellen, und dieses durch Einführung zusätzlicher "Schlupfvariabler" in ein LGS umzuwandeln. Dort wird durch geschickt gewählte Pivotschritte (z.B. mit Arbeitsblatt PIVOT) das Optimum gefunden. Alternativ können Lineare Optimierungsprobleme können auch mit dem Excel-Solver gelöst werden.

## 9.5 Graph. Lösen von lin. Optimierungsproblemen

---

1

In manchen Lehrbüchern wird eine etwas abweichende Definition von "Normalform" gegeben (ZF ist dort zu minimieren statt zu maximieren). Der Unterschied ist in etwa von der Art, wie es in England "normal" ist, links zu fahren, während es in Österreich "normal" ist, rechts zu fahren.

## Beispiel "Transportauftrag":

Ein Transportunternehmer hat für einen Auftrag 8 Kleintransporter (KlTr) und 3 LKW-Züge verfügbar. Es gelten folgende Restriktionen (Beschränkungen):

	pro KlTr.	pro LKW	insg. verfügbar
Paletten	2	3	24
Fahrer	1	2	10
Gewinn	1000	6000	max!

Variablen: (gesuchte Größen)

x: Anzahl der einzusetzenden Kleintransporter

y: Anzahl der einzusetzenden LKW

## Ungleichungen:

Beschränkung KlTr (1)  $x \leq 8$

Beschränkung LKW (2)  $y \leq 3$

max. verf. Paletten (3)  $2x + 3y \leq 24$

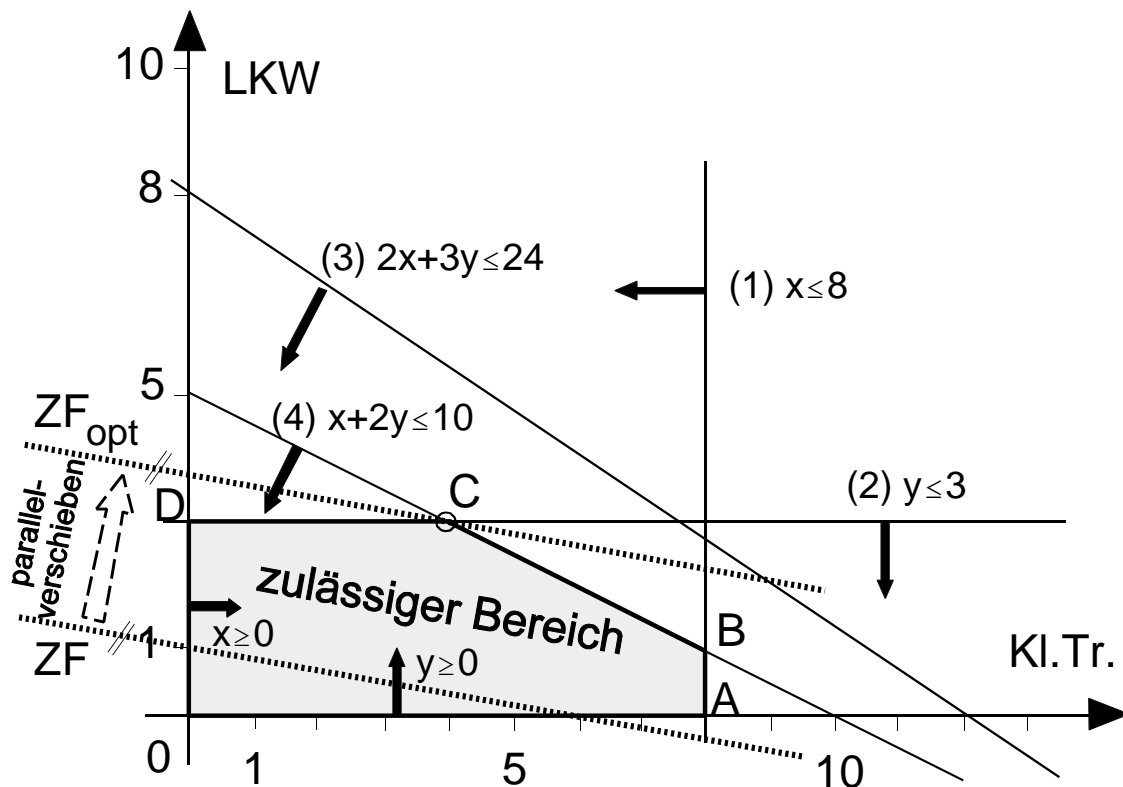
max. verf. Fahrer (4)  $x + 2y \leq 10$

Zielfunktion (ZF)  $1000x + 6000y = \text{Gew.} \rightarrow \text{max!}$

Nichtnegativitätsbedingungen:  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Ungleichung (1) und (2) sagen aus, daß max. 3 KlTr und max. 8 LKW eingesetzt werden können. Ungleichung (3) und (4) beschreiben, dass höchstens 24 Paletten bzw. 10 Fahrer zur Verfügung stehen. Die Zielfunktion ZF beschreibt, wie aus x und y die zu maximierende Größe auszurechnen ist.

## Graphische Lösung:



LKW und Kleintransporter - Graphische Lösung

Jede NB besitzt eine Halbebene als Lösungsmenge. Der schraffierte Bereich  $0ABCD$  ist der Durchschnitt aller Halbebenen (=Lösungsmenge = zulässiger Bereich). NB (3) trägt nichts zur Eingrenzung der Lösungsmenge bei!

**Ermittlung des Optimums:** Wir tragen zunächst eine Gerade ein, die die Richtung der ZF  $1000x + 6000y = G$  ( $G$ : Gewinn) angibt (bei uns  $1000x + 6000y = 6000$ ). Je größer die rechte Seite  $G$ , desto weiter rechts (oben) liegt diese Gerade. Daher ist ZF so lange nach rechts oben zu verschieben, bis ein einziger (Eck-) Punkt des zulässigen Bereiches gerade noch erreicht wird. Dieser ist das Optimum. Bei uns: Optimum bei  $x=4$  KlTr und  $y=3$  LKW-Zügen. Durch Einsetzen in ZF: optimalen Gewinn  $G_{\text{opt}} = 1000 \cdot 4 + 6000 \cdot 3 = 22.000,-$  ÖS.

## Allgemeine Vorgangsweise beim graphischen Lösen von linearen Optimierungsaufgaben:

- (1) Festlegen der Variablen
- (2) Nebenbedingungen als Ungleichungen formulieren
- (3) Zielfunktion aufstellen
- (4) Koordinatensystem zeichnen (geeigneter Maßstab)
- (5) Alle Restriktionen (Begrenzungen) in das Koordinatensystem eintragen
- (6) Zulässigen Bereich markieren
- (7) Zielfunktion eintragen (für G bequemen Wert wählen!)
- (8) Parallelverschieben der ZF nach rechts (Maximierung), bis der letzte Punkt des zulässigen Bereichs erreicht ist → Koordinaten dieses Punktes: optimale Kombination von  $x$  und  $y$ .
- (9) Berechnen des optimalen ZF-Werts durch Einsetzen der in (8) gefundenen Koordinaten in die ZF.

Die optimale Lösung eines linearen Optimierungsproblems liegt immer in einer Ecke des zulässigen Bereichs. Falls die Zielfunktion parallel zu einer der den zulässigen Bereich abgrenzenden Restriktionen liegt, so gibt es mehr als ein Optimum; aber unter diesen Optima ist (auch) mindestens eine Ecke.

Es gilt daher auf jeden Fall: sofern ein lineares Optimierungsproblem überhaupt ein Optimum besitzt, so wird dieses in einer Ecke des zulässigen Bereiches angenommen. Dies nutzt der Simplex-Algorithmus aus. Mit dem Simplex-Algorithmus "durchwandert" man den zulässigen Bereich von einer Ecke zu einer benachbarten mit höherem ZF-Wert so lange, bis es keine Nachbarecke mit höheren ZF-Wert mehr gibt. Dann hat man das Optimum erreicht.

## 9.6 Simplex-Algorithmus in Normalform

- Durch **Schlupfvariablen** wird aus dem linearen Ungleichungssystem ein LGS gemacht. Die Schlupfvariablen sind die nicht genutzten Kapazitäten der einzelnen Restriktionen.
- Aus dem sich so ergebenden LGS kann man eine **Basislösung** des Optimierungsproblems **ohne weiteres Rechnen direkt ablesen**: man setzt dazu alle Spalten (Variablen), die keine Einheitsvektorgestalt (ein Einser und sonst lauter Nullen) haben (sogenannte Nichtbasisvariable), gleich 0 und kann dann eine Lösung sofort ablesen.
- Finden einer neuen Basislösung mit höherem ZF-Wert:
  - . Geometrisch: Voranschreiten von einer Ecke im zulässigen Bereich zu einer benachbarten Ecke. Die Wahl des Pivotelements geschieht in zwei Schritten, die in dieser Reihenfolge einzuhalten sind:
    - 1) Wahl der **Pivotspalte** (zu pivotierende Variable)
    - 2) Wahl der **Pivotzeile**.
- Wahl der **Pivotspalte**: die Koeffizienten der ZF-Zeile geben an, um wieviel sich der Wert der ZF ändert, wenn die betreffende Var. von 0 auf 1 erhöht wird. Ist daher ein ZF-Koeff. einer Var.  $> 0$ , so bewirkt eine Erhöhung dieser Var. auch eine Erhöhung des Gewinns. Eine solche Variable (=Spalte) ist zum Pivotieren zu wählen.

Wenn alle ZF-Koeff  $\leq 0$ : Opt. erreicht!

- Wahl der **Pivotzeile**: Ist die zu erhöhende Variable (Pivotspalte) ausgewählt, so muß ermittelt werden, um wieviel diese Variable von ihrem bisherigen Wert 0 aus erhöht werden darf, ohne dass der zulässige Bereich verlassen wird. Rechentechnisch: berechne für jede Zeile  $i$  den Quotienten  $q_i = \frac{\text{Rechte Seite } (b_i)}{\text{Koeff. der Pivotspalte}}$ . Als **Pivotzeile** wird die Zeile mit dem *kleinsten positiven* Quotienten  $q_i$  genommen.
- Ein Simplexschritt ist rechentechnisch nichts anderes als ein Pivotschritt mit der zu erhöhenden Variable als Pivotspalte und der für diese Variable stärksten Restriktion als Pivotzeile. Im Zuge des Simplex kann dieselbe Zeile mehrmals als Pivotzeile auftreten (das war beim Gauß'schen Verfahren verboten!)
- Im Arbeitsblatt PIVOT wird ein Simplexschritt in folgenden Phasen durchgeführt:
  - 1) Wahl der Pivotspalte (NB mit ZF > 0). Eintragen der Nummer der Pivotspalte.
  - 2) aus der äußerst rechten Spalte ist der kleinste positive  $q_i$  - Wert zu ermitteln → ZF - Zeile.
  - 3) Im nächsten Tableau liest man die neue Basislösung direkt ab. Aus den ZF-Koeffizienten sieht man, ob bereits das Optimum erreicht wurde:
    - Falls eine Var. mit Wert 0 einen ZF-Koeff. > 0 besitzt, so bewirkt eine Erhöhung dieser Variable auch eine Erhöhung des ZF-Wertes (Gewinns).
    - Falls alle ZF-Koeff. ≤ 0 sind, ist das Optimum erreicht.

## 9.7 Transportauftrag mit Simplex:

### Variable:

$x$ : Anzahl eingesetzten Kleintransporter

$y$ : Anzahl eingesetzten LKW

$s_1$ : Anzahl nicht eingesetzte Kleintransporter

$s_2$ : Anzahl nicht eingesetzte LKW

$s_3$ : Anzahl nicht genutzte Paletten

$s_4$ : Anzahl nicht genutzte Fahrer

Nichtnegativitätsbedingungen:  $x, y, s_i \geq 0; i=1, \dots, 4$

### Simplex-Tableau:

Bed.	x	y	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	RS	$q_i$	ablesbare Basislösg
KITr.	1	0	1	0	0	0	8	8/0	$s_1 = 8$ (ungen. KITr)
LKW	0	1	0	1	0	0	3	<b>3/1</b>	$s_2 = 3$ (ungen. LKW)
Pal.	2	3	0	0	1	0	24	24/3	$s_3 = 24$ (ung. Pal.)
F.	1	2	0	0	0	1	10	10/2	$s_4 = 10$ (ung. Fahrer)
ZF	1000	6000	0	0	0	0	0		Gewinn = 0 $x=0; y=0$
KITr.	1	0	1	0	0	0	8	8	$s_1 = 8$ (ungen. KITr)
LKW	0	1	0	1	0	0	3	$\infty$	$y = 3$ (gen. LKW)
Pal.	2	0	0	-3	1	0	15	7,5	$s_3 = 15$ (ungen. Pal.)
F.	1	0	0	-2	0	1	4	<b>4</b>	$s_4 = 4$ (ungen. Fhr)
ZF	1000	0	0	-6000	0	0	-18000		Gewinn = +18.000 $x=0; s_2=0$
KITr.	0	0	1	2	0	-1	4		$s_1 = 4$ (ungen. KITr)
LKW	0	1	0	1	0	0	3		$y = 3$ (gen. LKW)
Pal.	0	0	0	1	1	-2	7		$s_3 = 7$ (ungen. Pal.)
F.	1	0	0	-2	0	1	4		$x = 4$ (gen. KITr)
ZF	0	0	0	-4000	0	-1000	-22000		Gewinn = +22.000 $s_2=0; s_4=0$

Pivotspalten: grau, Pivotelemente: **fett**, min.  $q_i$ : *kursiv*.

Die letzte Basislösung ist bereits optimal, weil alle ZF-Koeffizienten  $< 0$  sind und damit eine Erhöhung von  $s_2$  bzw.  $s_4$  den Gewinn nicht erhöht, sondern verringert.

## 9.7.1 Simplex-Optimierung mit Blatt PIVOT:

Mit dem Arbeitsblatt PIVOT kann das Simplex-Pivotieren in Excel elegant gelöst werden: Im Bereich B5:G8 kommt die Koeffizientenmatrix; die Spalten H,I,J wurden auf Breite 0 verringert, weil sie nicht gebraucht werden; die rechte Seite wird in Spalte K eingetragen. In Zeile 9 kommt die ZF; in Spalte M werden ergänzend noch die  $q_i$  ausgerechnet. Unter dem ersten Tableau müssen die Pivotspalte (hier Spalte 2) und Pivotzeile (hier: Z. 2) angegeben werden. Als Pivotspalte ist eine Spalte mit ZF-Wert  $> 0$  zu wählen; als Pivotzeile diejenige Zeile mit dem kleinsten  $q_i > 0$  (im ersten Tableau  $q_i = 3 \rightarrow 2.$  Zeile)

	A	B	C	D	E	F	G	K	L	M
1	PIVOT: SIMPLEX-Optimierung									
2										
3	Spalte->	1	2	3	4	5	6	RS	Pivotsp.	qi
4	TAB 1									
5	Z1	1	0	1	0	0	0	8	0	#DIV/0!
6	Z2	0	1	0	1	0	0	3	1	3
7	Z3	2	3	0	0	1	0	24	3	8
8	Z4	1	2	0	0	0	1	10	2	5
9	Z5	1000	6000	0	0	0	0	0	6000	
10		Pivotsp:	2			Pivotzeile:	2			
11	TAB 2									
12	Z1	1	0	1	0	0	0	8	1	8
13	Z2	0	1	0	1	0	0	3	0	#DIV/0!
14	Z3	2	0	0	-3	1	0	15	2	7,5
15	Z4	1	0	0	-2	0	1	4	1	4
16	Z5	1000	0	0	-6000	0	0	-18000	1000	
17		Pivotsp:	1			Pivotzeile:	4			
18	TAB 3									
19	Z1	0	0	1	2	0	-1	4	0	
20	Z2	0	1	0	1	0	0	3	1	
21	Z3	0	0	0	1	1	-2	7	0	
22	Z4	1	0	0	-2	0	1	4	0	
23	Z5	0	0	0	-4000	0	-1000	-22000	0	

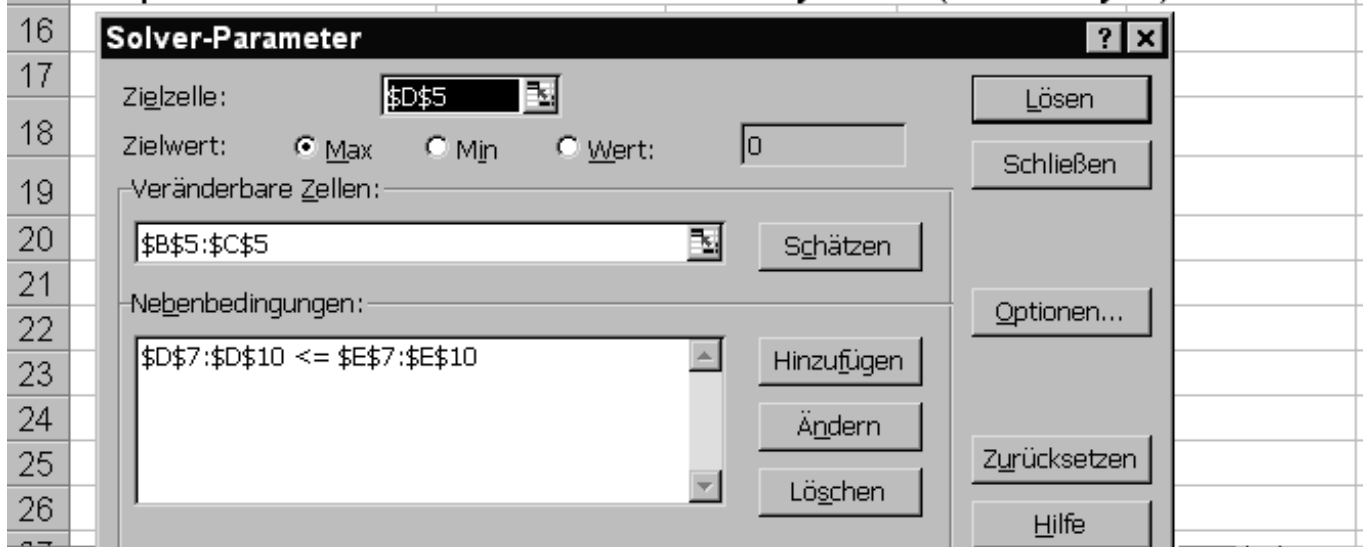
Aus jedem Tableau kann eine Basislösung direkt abgelesen werden (wie vorne angegeben). Im dritten Tableau ist die opt. Lösung erreicht, weil alle ZF-Koeffizient  $< 0$  sind. Fazit: PIVOT nimmt zwar die Rechenarbeit ab, Pivotschritte verstehen und Basislösungen ablesen muss man allerdings trotzdem können.

## 9.7.2 Simplex-Optimierung mit dem Excel-Solver:

Es ist zunächst ein Tableau ähnlich wie beim Lösen von LGS mit dem Solver einzugeben. Das untenstehende Beispiel zeigt ein Muster. In Spalte D kommen Formeln, mit denen die aktuelle rechte Seite (bei uns zunächst für  $x=1$  und  $y=2$ ) errechnet wird. Z.B. enthält die Zielzelle D5 den aktuellen ZF-Wert  $B5*B6+C5*C6$ .

	A	B	C	D	E
1	<b>Simplex-Optimierung mit Excel-Solver</b>				
2	<b>Beispiel "Transportauftrag"</b>				
4	Menge	x KITr.	y LKW		
5	veränderbare Zellen:	1	2	13000	<-- Zielzelle
6	Zielfunktionskoeff.	1000	6000	RS akt.	RS maximal
7	NB1 Anz. KITr	1	0	1	8
8	Max. Anz. LKW	0	1	2	3
9	max. Zahl Paletten	2	3	8	24
10	max. Zahl Fahrer	1	2	5	10

- 12 In die eingerahmten Bereiche sind die Zahlenwerte einzugeben.  
 13 In Zeile 5 zunächst plausible Startwerte für x, y; in Zeile 6 die ZF-Koeff.  
 14 In Bereich B7:C10 die Koeff. der Nebenbed.; in Spalte E die rechte Seite.  
 15 In Sp. D werden die rechten S. für die akt. x,y-Werte (hier  $x=1$ ;  $y=2$ ) errechnet.

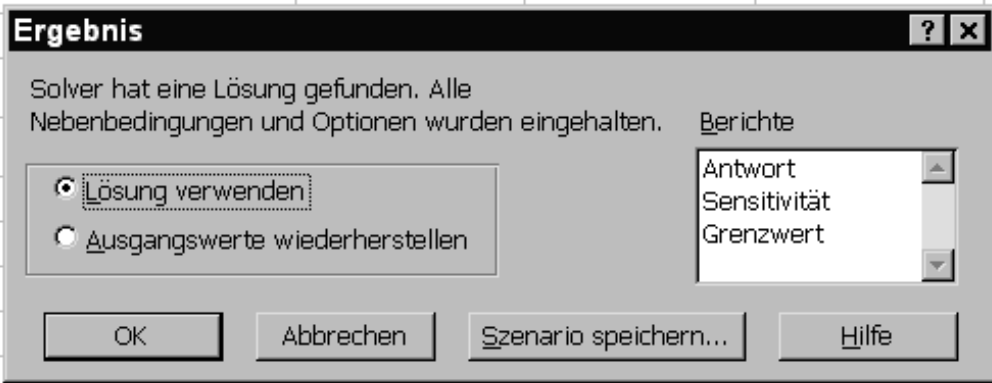


Beim Aufrufen des Solvers müssen eingetragen werden:

- die Zielzelle (D5)
- Angabe, dass Zielwert maximiert werden soll
- die veränderbaren Zellen (Bereich B5:C5)
- die Nebenbedingungen (diesmal mit  $\leq$  statt  $=$  wie beim LGS)

Weiters können noch einige Optionen gesetzt werden.

Nach dem Drücken der Lösen-Taste liefert der Solver folgendes Bild:

	A	B	C	D	E
1	<b>Simplex-Optimierung mit Excel-Solver</b>				
2	<b>Beispiel "Transportauftrag"</b>				
4	Menge	x KITr.	y LKW		
5	veränderbare Zellen:	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>22000</b>	<-- Zielzelle
6	Zielfunktionskoeff.	<b>1000</b>	<b>6000</b>	RS akt.	RS maximal
7	NB1 Anz. KITr	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>8</b>
8	Max. Anz. LKW	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>3</b>
9	max. Zahl Paletten	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>17</b>	<b>24</b>
10	max. Zahl Fahrer	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>10</b>	<b>10</b>
12	In die eingerahmten Bereiche sind die Zahlenwerte einzugeben.				
13	In Zeile 5 zunächst plausible Startwerte für x, y; in Zeile 6 die ZF-Koeff.				
14	In Bereich B7:C10 die Koeff. der Nebenbed.; in Spalte E die rechte Seite.				
15	In Sp. D werden die rechten S. für die akt. x,y-Werte (hier x=1; y=2) errechnet.				
17					

Es wurden die optimalen Lösungen  $x=4$  und  $y=3$  sowie max. Gewinn = 22.000 ausgerechnet. In der Ergebnisbox des Solvers kann man noch einige Optionen anwählen (u.a. Sensitivitätsanalyse, siehe unten). Man erkennt aus dem Ergebnistableau weiters, dass im optimalen Fall 4 von 8 Kleintransportern, alle 3 LKW, 17 von 24 Paletten sowie alle 10 Fahrer genutzt werden. Nichtoptimale Zwischenlösungen zeigt der Solver nicht an.

Fazit: auch hier arbeitet der Solver elegant, wenn man sich auskennt und die Sache richtig eingibt und bedient! Der Solver bietet noch eine Reihe von Optionen, auf die wir hier aber nicht mehr eingehen können.

## 9.8 Relative Kostenfaktoren (Schattenpreise):

Die im optimalen Tableau in der ZF-Zeile stehenden Koeffizienten -4000 und -1000 heißen auch **relative Kostenfaktoren** oder **Schattenpreise** und haben folgende anschauliche Bedeutung: ein zusätzlicher LKW (über die Kapazitätsgrenze 3 LKW hinaus) würde den Gewinn um weitere S 4000,- erhöhen; ein zusätzlicher Fahrer (über die 10 verfügbaren Fahrer hinaus) den Gewinn um S 1000,- erhöhen. Anhand der Schattenpreise im Optimum kann man überlegen, ob sich die Ausweitung der betreffenden Restriktion (hier die Anz. LKW bzw. die Anz. Fahrer) um eine weitere Einheit lohnt oder nicht. Mit dem Excel-Solver erhält man (neben anderen Informationen) die Schattenpreise, indem man sich einen Sensitivitätsbericht erstellen läßt.

### Bemerkungen:

- Jeder Basislösung entspricht eine Ecke des zulässigen Bereichs; jeder Pivotschritt entspricht dem Übergang von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke mit höherem Gewinn. Im (händisch gerechneten) Beispiel wurden die Ecken (0;0); (0;3); (4;3) erreicht.
- Wenn man beim ersten Pivotschritt statt Spalte 2 die Spalte 1 pivотиert (also x statt y erhöht) hätte, dann hätte man dasselbe Optimum über andere Ecken erreicht. Beim Simplex-Verfahren gibt es i.a. viele Wege zum Optimum.
- Bei der Lösung wurde nicht berücksichtigt, daß alle Variablen nur für ganzzahlige Werte definiert sind. Ganzzahligkeitsbedingungen sind numerisch lästig und werden bei uns daher ignoriert.
- Die Werte  $q_i$  lassen sich geometrisch deuten. Im ersten Tableau wurde ausgehend vom Punkt (0;0) die Variable y erhöht. Die  $q_i$  entsprechen den Schnittpunkten der Restriktionen mit der y-Achse: Restriktion (1) schneidet überhaupt nie; Restriktion (2) bei  $y=3$ ; Restriktion (3) bei  $y=8$  und Restriktion (4) bei  $y=5$ .

## 9.9 Optimierung in der Betrieblichen Praxis:

Wichtig ist eine *Zusammenarbeit* zwischen Betriebswirt und einschlägigen mathematischen Spezialisten (gibt es auch an Uni Klagenfurt)! Optimierungsmodelle sind i.a. zu komplex, um vom Betriebswirt im Do-it-yourself-Modus aufgestellt und durchgerechnet zu werden.

Optimierungsprojekte in Kärntner Betrieben:

### 9.9.1 Mischungsaufgabe in der Chem. Industrie:

Aus ca. 500 verschiedenen, im Rohstofflager in unterschiedlicher Menge verfügbaren Metallschrotten mit unterschiedlichem Gehalt an Edelmetallen (Va, Cr, Mg, Mb, Wo) sollen möglichst kostengünstig ca. 15 verschiedene Zuschlagstoffe für die Stahlindustrie in einem Elektroschmelzofen gemischt werden.

Var: wieviel von welchem Rohstoff ist zu nehmen

NB: Edelmetall-Konzentrationen in Schmelze

ZF: Kostenminimale Produktion der Zuschlagstoffe

### Spirituosenhersteller - optimaler Produktmix:

Ein Spirituosenhersteller vertreibt ca. 120 Sorten Spirituosen (Liköre, Brände, Schnäpse). Gewisse Sorten kann er zukaufen, gewisse selber herstellen. Die Destillerie hat nur eine beschränkte Kapazität, auch bei den Rohstoffen und beim Rohstofflager gibt es Beschränkungen. Auch der Absatz jeder Spirituose liegt innerhalb bestimmter Grenzen.

Optimierung: Welche Spirituosen sollen in welcher Menge selbst gebrannt, welche zugekauft werden?

## 9.10 CPM-Netzplantechnik

Netzpläne sind graphische Darstellungen zur Planung, Koordination und Kontrolle komplexer Abläufe, bei denen zwischen den einzelnen Aktivitäten terminliche Abhängigkeiten bestehen.

### **Netzpläne eignen sich hervorragend für:**

- *Überblick* über den gesamten Projektverlauf
- Darstellung von *terminlichen Abhängigkeiten* zwischen Teilaktivitäten
- Abschätzung der *Dauer* von einzelnen Teilaktivitäten sowie des gesamten Projekts
- *Bewertung von Verzögerungen* im Hinblick auf die termingerechte Fertigstellung des Gesamtprojektes
- Vergleich verschiedener Planungsvarianten im Hinblick auf Termine, Kosten und Einsatzmittelbedarf

### **Begriffe in der Netzplantechnik:**

**Projekt:** Bezeichnung für das Gesamtvorhaben, das durch einen Netzplan erfaßt werden soll.

**Vorgang:** zeiterforderndes Geschehen mit definiertem Anfang und definiertem Ende. Man muss bei jedem Vorgang sagen können, wann er beginnt und wann er endet. Beispiele für mögliche Vorgänge sind: "Fundament ausheben", "Offerte einholen", "Bericht schreiben", "Entscheidung fällen", "Veranstaltung besuchen", "Trockenzeit des Anstriches", usw.

**Ereignis:** darunter versteht man das Eintreten eines bestimmten Zustandes im zeitlichen Ablauf. Jeder Vorgang hat ein Anfangs- und ein Endereignis.

**CPM-Netzplan:** Netzplan-Darstellungsmethode in einem Knoten-Kantengraphen, bei der Ereignisse durch Knoten und Vorgänge durch Pfeile dargestellt werden. CPM = Critical Path Method.

**Andere Netzplan-Darstellungsmethoden** sind z.B. PERT (Program Evaluation and Review Technique) oder MPM (Metra Potential Method)

### **Elemente eines CPM-Netzplanes:**

*Vorgänge* werden mit Pfeilen dargestellt. Beginn und Ende eines Vorganges sind *Ereignisse*, die durch Knoten am Beginn und Ende jeder Kante symbolisiert werden.

*Startereignis:* Beginn des Projekts

*Zielereignis:* Ende (Fertigstellung) des Projekts

*Vorgänger* bzw. *Nachfolger* eines Vorganges nennt man solche Vorgänge, die dem betrachteten Vorgang unmittelbar vorausgehen bzw. nachfolgen.

Damit ein Vorgang beginnen kann, müssen alle seine Vorgänger abgeschlossen sein.

*Scheinvorgänge* dienen dazu, logische Abhängigkeiten zwischen Vorgängen darzustellen. Scheinvorgänge haben die Dauer null.

# Beispiel Hausbau:

Vorgang (Aktivität)	Dauer (Tage)	Vorgänger (muss fertig sein, damit Vorgang beginnen kann)
A: Finanzpartner sichern	14	-
B: Grundstück wählen	8	-
C: Finanzierung wählen	5	A
D: Grundstück kaufen	26	A und B
E: Bauplan erstellen	30	B

## Netzplan Hausbau: Vorgänge (samt Dauer), Vorgänger

Die fünf oben dargestellten Vorgänge sollen als CPM-Netzplan dargestellt werden.

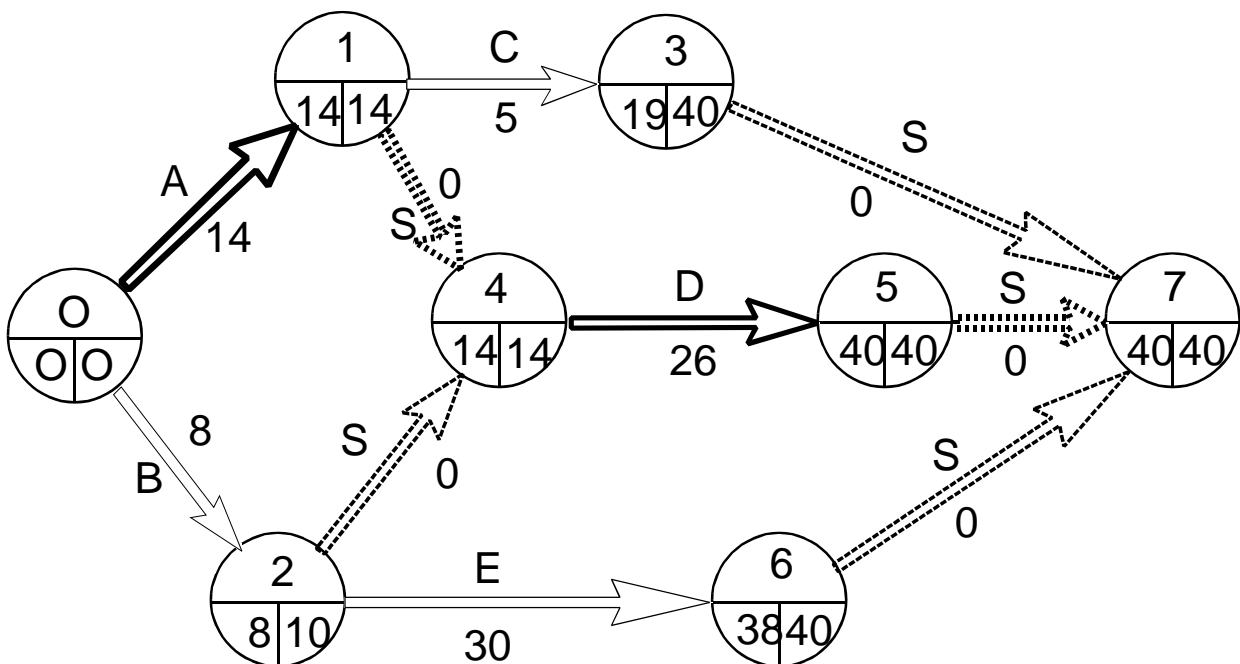


Abb. 6 Beispiel Hausbau: korrekte Lösung

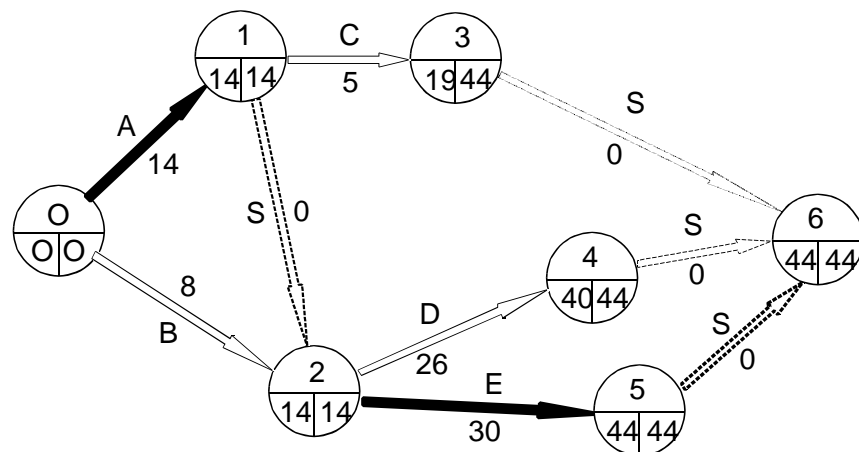
## 9.11 Zeichnen eines CPM-Netzplans:

Annahme: die Vorgänge sind als geordnete Liste samt Zeit- und Vorgängerangabe gegeben.

Erstellung des CPM-Netzplans:

- Zunächst wird der Startknoten gezeichnet.
- Dann werden nacheinander alle Vorgänge gezeichnet:
  - Hat ein Vorgang *keinen Vorgänger*, so beginnt er am Startknoten (Im Beispiel Vorgänge A und B).
  - Hat ein Vorgang *genau einen Vorgänger*, dann kann der Endknoten dieses Vorgängers als Startknoten des betrachteten Vorganges genommen werden. Der Vorgangspfeil wird direkt an den Endknoten des Vorgängers angehängt. (im Beispiel Vorgänge C und E).
  - Hat ein Vorgang *mehr als einen Vorgänger*, dann sind von den Endknoten *aller* Vorgänger Scheinkanten zu einem neuen Knoten zu ziehen, der als Anfangsknoten dieses Vorganges dienen kann (sofern ein derartiger Knoten nicht schon existiert) (Im Beispiel Vorgang D).
- Zu jedem Vorgang (Pfeil) wird die Vorgangsdauer geschrieben.
- Jeder Vorgang wird mit einem Endknoten abgeschlossen
- Die Knoten werden fortlaufend (wie sie gezeichnet werden) durchnummeriert (Startknoten = 0).
- In jeden Knoten wird unten der früheste (links) bzw. späteste (rechts) Zeitpunkt für dieses Ereignis eingetragen.

## Falsche Lösung:



**Netzplan Hausbau - falscher Einsatz von Scheinkanten**

Um Vorgang D einzeichnen zu können, wurde zunächst eine Scheinkante von Knoten 1 zu Knoten 2 gezeichnet. Damit muss in Knoten 2 auch Vorgang A abgeschlossen sein. Knoten 2 gezogen. Knoten 2 repräsentiert somit das Ereignis, dass sowohl Vorgang A als auch Vorgang B abgeschlossen ist - deswegen ist der früheste Ereigniszeitpunkt für Knoten 2 (links unten eingetragen) 14 Tage. Vorgang D kann bei Knoten 2 beginnen. Anschließend soll Vorgang E eingetragen werden, der nach Vorgang B kommen muß. Dies führt dazu, dass auch E ab Knoten 2 gezeichnet wird. Dies ist jedoch falsch, weil E nur B, nicht aber auch A als Vorgänger hat, wie das Diagramm fälschlich angibt.

Diese Problematik wird vermieden, wenn man jedesmal dann, wenn ein Vorgang mehr als einen Vorgänger besitzt, mit lauter Scheinkanten einen neuen Startknoten für diesen Vorgang konstruiert. In unserem Fall braucht Vorgang D einen neuen Startknoten mit A und B als Vorgänger.

## 9.12 Zeitanalyse im CPM-Netzplan

Für jeden Knoten  $i$  sowie für alle Vorgänge  $ij$  (Vorgang mit Startknoten  $i$  und Endknoten  $j$ ) werden folgende Zeitangaben in den Netzplan eingetragen:

- $FZ_i$  : **Frühester Zeitpunkt**, an dem Ereignis  $i$  eintreten kann  
 $SZ_i$  : **Spätester Zeitpunkt**, an dem Ereignis  $i$  eintreten kann  
 $d_{ij}$  : **Dauer des Vorgangs  $ij$**  mit Startereignis  $i$  und Endereignis  $j$ .

Der **kritische Weg** (Critical Path) ist der **zeitlängste** Weg vom Start- zum Zielknoten. Er determiniert die **minimale Dauer des gesamten Projektes**. Für alle Knoten  $i$  entlang des kritischen Weges gilt:  $FZ_i = SZ_i$ . Damit ist die praktische Ermittlung der kritischen Knoten im Netzplan einfach.

Für jeden Vorgang  $ij$  gibt es vier relevante Zeitpunkte:

$FZ_i$ : frühester Beginn                       $SZ_i$ : spätester Beginn

$FZ_j$ : frühestes Ende                         $SZ_j$ : spätestes Ende

Ein Vorgang ist kritisch, wenn Anfangs- und Endknoten des Vorganges kritisch sind, d.h. wenn  $FZ_i = SZ_i$  und auch  $FZ_j = SZ_j$  gelten.

Jeder Vorgang auf dem kritischen Weg heißt ebenfalls kritisch, weil eine Verzögerung jedes kritischen Vorgangs bereits die Gesamtprojektdauer verlängert. Eine Verkürzung der Gesamtprojektdauer ist nur möglich, wenn kritische Vorgänge verkürzt werden.

## 9.13 Algorithmus für CPM-Netzplan:

Scheinvorgänge werden nur in einer klar definierten Weise eingesetzt. Zwischen zwei Knoten gibt es höchstens eine Kante. (Bei Prüfungsaufgaben liegen Schritte 1-3 i.a. bereits in der Angabe vor).

- (1) Sämtliche Vorgänge samt Vorgangsdauer auflisten.
- (2) Für jeden Vorgang alle Vorgänger ermitteln.
- (3) Vorgänge so sortieren, daß alle Vorgänger jedes Vorganges **vor** diesem Vorgang liegen. Geht das nicht, dann sind Vorgängerbeding. widersprüchlich.
- (4) Zeichne einen Startknoten 0
- (5) Wiederhole für alle Vorgänge  $V$  in der Reihenfolge der Sortierung (3):
  - (a) Vorgang hat keinen Vorgänger: lasse man ihn beim Startknoten beginnen und gehe zu (d).
  - (b) Vorgang hat genau einen Vorgänger: lasse ihn beim Endknoten des Vorgängers beginnen; gehe zu (d).
  - (c) Vorgang hat mehr als einen Vorgänger hat: zeichne von den Endknoten er Vorgänger Scheinvorgänge (mit Zeitdauer 0) derart zum neuen Anfangsknoten; trage den Vorgang ein und gehe zu (d).
  - (d) Schreibe zum gezeichneten Vorgang seine Dauer und schließe ihn mit einem Endknoten ab.
- (6) Führe alle Endknoten, von denen noch kein Pfeil (Vorgang oder Scheinvorgang) ausgeht, durch Scheinvorgänge in einem Zielknoten  $n$  (Projektende) zusammen.

## 9.14 Zeitanalyse in CPM-Netzplänen:

- (7) **Früheste Ereigniszeitpunkte**  $FZ_i$  für alle Knoten  $i$
- (a) Startknoten 0 erhält  $FZ_0 = 0$  ( $0 = \text{"Null"}$ )
  - (b) Wiederhole für alle Knoten  $j$ :
    - Falls  $j$  Endknoten des echten Vorganges  $ij$  mit Dauer  $d_{ij}$ , so ist  $FZ_j = FZ_i + d_{ij}$ .
    - Falls  $j$  Endknoten mehrerer Scheinvorgänge (die in den Knoten  $s_1, s_2, \dots, s_k$  beginnen) ist, so ist sein frühester Ereigniszeitpunkt  $FZ_j = \max FZ_{s_i}$
- (8) **Späteste Ereigniszeitpunkte**  $SZ_i$  für alle Knoten  $i$ :
- (a) Das Zielereignis  $n$  erhält  $SZ_n = FZ_n$ ; für Zielknoten gilt: frühester Zeitpunkt = spätester Zeitpunkt.
  - (b) Wiederhole für alle Knoten in absteigender Folge:
    - Falls  $i$  Anfangsknoten eines einzigen Vorganges  $ij$  ist, so ist  $SZ_i = SZ_j - d_{ij}$ . (Scheinvorgänge:  $d_{ij}=0$ ).
    - Falls  $i$  Anfangsknoten mehrerer Vorgänge (Scheinvorgänge), die in den Knoten  $s_1, s_2, \dots, s_k$  enden, so ist sein spätester Ereigniszeitpunkt  $SZ_i = \min (SZ_{s_j} - d_{ij})$ .
- (9) Optionale Fleissaufgabe: Reduktion von Scheinvorgängen (siehe Skriptum Ossimitz: Netzplantechnik)
- (10) **Ermittlung des kritischen Weges** (=krit. Pfad):
- (a) markiere alle Knoten mit  $FZ_i = SZ_i$ .
  - (b) Vorgänge, die diese Knoten verbinden, bilden insgesamt den kritischen Weg.
- (11) **Pufferzeiten** für alle Vorgänge:  
Wiederhole für alle Vorgänge  $ij$ :
- 1) Gesamtpuffer:  $GP_{ij} = SZ_j - FZ_i - d_{ij}$
  - 2) Freier Puffer:  $FP_{ij} = FZ_j - FZ_i - d_{ij}$
  - 3) Unabh. Puffer:  $UP_{ij} = FZ_j - SZ_i - d_{ij}$  bzw. 0, für  $UP_{ij} < 0$

# Vorlesung Angew. Mathematik für BWL

## 10. Woche

### Finanzmathematik

#### 10.1 Prozentrechnung

“Prozent” heisst wörtlich übersetzt “von Hundert” oder einfach “Hunderstel”. Zwei Prozent sind also  $2/100$  oder  $0,02$ . Auf dieser Tatsache basiert die sehr praktische Prozentformatierung in Excel und anderen Kalkulationsprogrammen. Wenn Sie den Wert  $2\%$  in eine Excel-Zelle eintragen wollen, dann tippen Sie einfach “ $2\%$ ”. Damit kommt in die Zelle die Zahl  $0,02$ ; die allerdings in der Form  $2\%$  oder  $2,00\%$  am Bildschirm angezeigt (formatiert) wird. Wenn Sie diese Prozentzahl mit dem Basiswert (in einer andern Zelle) einfach multiplizieren, erhalten Sie den gewünschten Prozentbetrag (z.B.  $2\%$  von  $3000$  ist  $0,02 \cdot 3000 = 60$ ). Vergessen Sie die antiquierten Formeln

der Art  $\text{Prozentbetrag} = \frac{\text{Basiswert} \cdot p\%}{100}$ , in denen explizit durch  $100$

dividiert wurde. Nebenbei: Wenn sich in so eine Formel dann noch (wie in obigen Beispiel) ein Prozentzeichen eingeschlichen hat, dann ist die Formel streng betrachtet schon falsch, weil das Prozentzeichen bereits die Tatsache zum Ausdruck bringt, dass die Zahl  $p$  durch Hundert zu dividieren ist bzw. die Anzahl der Hunderstel wiedergibt. Wenn man schon unbedingt explizit durch  $100$  dividieren will, dann muss  $p$  in obiger Formel die Zahl  $2$  und nicht die Zahl  $2\% = 0,02$  sein! Vergessen Sie diesen antiquierten Kram - und gehen Sie zum logischen und einfachen Konzept der Prozentformatierung über: überall dort, wo Sie ein Prozentzeichen sehen, steht eigentlich  $1/100$  der angezeigten Zahl. Dann lautet die Prozentformel einfach

$$\text{Prozentbetrag} = \text{Basiswert} \cdot p.$$

Dabei ist  $p$  z.B. die Zahl  $0,02$  (und NICHT die Zahl  $2$ ), die Sie sich auf Wunsch auch in der Form  $2\%$  anschreiben oder mit Excel anzeigen lassen können.

Wichtiges Grundprinzip:

**Jede Prozentangabe bezieht sich auf einen bestimmten Basiswert** - und man muss wissen, was dieser Basiswert ist, damit die Prozentangabe überhaupt einen Sinn macht! Wenn ich nicht weiss, "2% wovon?", dann nützt mir die schöne Angabe "2%" nichts. Dieser Basiswert kann sich im Laufe der Zeit ändern (z.B. bei Verzinsung mit Zinseszins). Finanzmathematischen Prozentangaben beziehen sich oft auch auf bestimmte Zeiträume: z.B. sind 1% Zinsen p.a. recht wenig, 1% Zinsen p.m. schon wesentlich mehr.

Bei der Berechnung der MwSt von 20% ist stets der Nettopreis die Basis, von der der Steuerbetrag zu ermitteln ist. z.B.

netto 1000,- + 20% davon (= ÖS 200,- ) = 1200,- brutto.

Um aus dem Bruttobetrag den Mehrwertsteuerbetrag auszurechnen, darf man nicht 20% von 1200,- ermitteln! Korrekt ist einer der folgenden Wege:

- Man setzt  $1200,- = 120\%$ ; ermittelt daraus durch Division  $1200/1,20$  den Nettopreis (=100%) = 1000,- und davon 20%  $1000 \cdot 0,2 = 200,-$
- Man ermittelt wie eben den Nettopreis und subtrahiert  
Brutto - Netto = MwSt-Betrag:  $1200,- - 1000,- = 200,-$
- Man ermittelt den zum Zuschlagsatz  $p=20\% = 0,2$  äquivalenten Abschlagsatz  $d$  gemäß der Formel  $d = p/(1+p)$  und erhält  $d = 0,1/1,2 = 0,166666... = 16,6666...%$ . Der MwSt-Zuschlag zum Nettopreis ist dann  $d \cdot \text{Bruttopreis} = 0,166666... \cdot 1200,- = 200,-$ . Der Nachteil dieser Methode besteht darin, dass runde Zuschlagsätze oft unendliche Dezimalbrüche als äquivalente Abschlagsätze haben.

*Aufgabe: Ein PKW kostet bei einem Autohändler laut Liste inkl. MwSt und NoVA ÖS 260.000,- Der Nettopreis (exkl MwSt und NoVA) beträgt ÖS 200.000,-. Der Kunde möchte 10% Rabatt. Ist es für ihn brutto günstiger, wenn der Bruttobetrag oder wenn der Nettopreis um 10% reduziert wird, wobei im Falle der Nettopreisreduktion vom reduzierten Nettopreis noch NoVA und MwSt zu bezahlen sind?*

## 10.2 Finanzmathematik: Grundbegriffe

In der Finanzmathematik ist es nützlich, ein einheitliches Gerüst an Grundbegriffen und auch feste Symbole für die einzelnen Begriffe zu verwenden. Die folgenden Ausführungen lehnen sich weitgehend an das begriffliche Gerüst vom Kapitel "Finanzmathematik" des HAK-Schulbuches "Kronfellner/Peschek: Angewandte Mathematik 2" an.

- **Kapital (K):** zu verzinsender Geldbetrag.  $K_0$ : Kapital zum Anfangszeitpunkt 0;  $K_1$ : Kapital zum Zeitpunkt 1 bzw. nach einer Periode (meist Zinsperiode). Mit  $K_n$  wird i.a. das Kapital am Ende der Verzinsung (nach  $n$  Zinsperioden) bezeichnet.
- **Verzinsung/Diskontierung:** Bei der Verzinsung werden die Zinsen zum Kapital dazugezählt, bei der Diskontierung (Abzinsung) abgezogen.
- **antizipativ/dekursiv:** Die Verzinsung bzw. Diskontierung kann zu Beginn (antizipativ) oder am Ende der Zinsperiode erfolgen.
- **Zinssatz (i) / Diskontsatz (d):** Prozentsatz des Kapitals, der zur Berechnung des Zins- bzw. Diskontbetrages pro Zinsperiode herangezogen wird.

Kapitalien (Geldbeträge) beziehen sich in der Finanzmathematik immer auf bestimmte Zeitpunkte; Zinssätze und Zinsbeträge beziehen sich auf Zeitintervalle. Von Zinsperioden spricht man vor allem dann, wenn eine Verzinsung über mehrere gleich lange Zinsintervalle erfolgt (in der Praxis meist jährlich mit den Jahreswechsell als Zinsterminen. Andere Zinsperioden (unterjährig Verzinsung, z.B. monatlich oder quartalsweise) bzw. Zinstermine können zwar prinzipiell vereinbart werden, sind in der Praxis seltener üblich.)

## 10.3 Einfacher Zins vs. Zinseszins

**Einfacher Zins:** die Zinsen jeder Zinsperiode werden stets vom Anfangskapital berechnet und am Ende der Gesamtlaufzeit dem Kapital zugeschlagen.

Es gilt:  $K_1 = K_0 + i \cdot K_0$ ;  $K_2 = K_0 + 2i \cdot K_0$ ;

allgemein:  $K_n = K_0 + n \cdot i \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$ .

Dabei sind  $i \cdot K_0$  die Zinsen für eine (jede) Zinsperiode und  $n \cdot i \cdot K_0$  die Zinsen für  $n$  Zinsperioden.

**Verzinsung mit Zinseszins:** die Zinsen werden am Ende jeder Zinsperiode zum Kapital dazugeschlagen und ab der nächsten Zinsperiode mitverzinst.

$K_1 = K_0 + i \cdot K_0 = (1 + i) \cdot K_0 = r \cdot K_0$ ;

$K_2 = K_1 + i \cdot K_1 = (1 + i) \cdot K_1 = r \cdot K_1 = r^2 \cdot K_0$

allgemein:  $K_n = (1 + i)^n \cdot K_0 = r^n \cdot K_0$

Einfache Verzinsung entspricht dem Modell des linearen Wachstums, Verzinsung mit Zinseszins dem Modell des exponentiellen Wachstums. Dies erkennt man besonders leicht, wenn man den (finanzmathematisch unrealistisch hohen) Zinssatz  $i = 100\% = 1$  wählt. Dann wächst das Kapital bei einfachem Zins jede Zinsperiode um  $K_0$ ; insgesamt ergibt sich das lineare Wachstum

$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i) = K_0 \cdot (1 + n)$ .

Bei Verzinsung mit Zinseszins verdoppelt es sich hingegen jede Zinsperiode:  $K_n = (1 + i)_n \cdot K_0 = 2^n \cdot K^0$  (wegen  $i = 1$ ).

## 10.4 Zwei Prinzipien der Zinseszinsrechnung

Bei gleichem Zinssatz wächst das Kapital bei einfacher Verzinsung über mehrere Zinsperioden (über längere Zeit sogar wesentlich) langsamer als bei Verzinsung mit Zinseszins. Dennoch bieten die Banken beim Sparen ausschließlich Verzinsung mit Zinseszins. Warum? Würde die Bank nur einfache Verzinsung anbieten, dann würde ein kluger Sparer zu jedem Zinstermin sein Sparbuch auflösen, die Zinsen für eine Zinsperiode kassieren, und das um die Zinsen erhöhte Kapital sofort wieder auf ein neues Sparbuch legen. Damit würde er (abgesehen von eventuellen Gebühren usw.) faktisch eine Verzinsung mit Zinseszins erreichen.

Allgemein gilt bei der Verzinsung mit Zinseszins folgendes **Prinzip des Splittings bzw. Zusammenfügen von Laufzeiten**:

*“Die Kapitalentwicklung ist unabhängig davon, ob man zu den Zinsterminen das gesamte Kapital abhebt und sofort wieder zum selben Zinssatz anlegt oder nicht.”*

Zinsänderungen können mit Hilfe dieses Laufzeitprinzips folgend berücksichtigt werden: man berechnet zunächst das Kapital samt Zinsen bis zum Zeitpunkt der Zinsänderung, denkt sich dieses abgehoben und sofort wieder zum neuen Zinssatz angelegt.

Das zweite Prinzip bezieht sich auf das **Splitting bzw. Zusammenlegen des Kapitals**:

*“Mehrere zum selben Zinssatz über dieselbe Laufzeit angelegte Kapitalien erbringen in Summe dieselbe Kapitalvermehrung wie das zusammengelegte Kapital.”*

Es bringt also dem Sparer weder einen Vor- noch Nachteil, sein Gesamtvermögen auf mehrere gleich verzinste Sparbücher zu verteilen. Banken sind allerdings eher an größeren Anlagebeträgen auf einem Konto interessiert und bieten i.a. dafür bessere Zinssätze.

Das Kapitalsplittingprinzip kann beispielsweise genutzt werden, um gemischte Sparformen zu berechnen: z.B. werden auf ein Sparbuch mit einem bestimmten Anfangskapital über einen bestimmten Zeitraum regelmäßige Einzahlungen in fester Höhe getätigt. Dann kann man das Kapital am Ende der Laufzeit ermitteln, indem man die Verzinsung des Anfangskapitals und das regelmäßige Ansparen gedanklich und rechnerisch zunächst als zwei getrennte Vorgänge behandelt und dann die jeweiligen Endkapitalien zusammenzählt.

## 10.5 Das Sparbuch

Beim Sparbuch werden üblicherweise sowohl einfacher Zins als auch Zinseszins in folgender Weise kombiniert: für Zeiträume über mehrere Zinsperioden wird (wegen des Laufzeitprinzips) mit Zinseszins gerechnet, innerhalb einer Zinsperiode mit einfachem Zins. Beim Sparbuch gilt in Österreich meist: die Zinstermine sind jeweils zum Jahreswechsel, jeder Monat wird mit 30 Tagen und das Jahr mit 360 Tagen angesetzt. Die Verzinsung beginnt mit dem der Einlage folgendem Werktag und endet einen Werktag vor Behebung des Kapitals. Beträge, die innerhalb von 14 Tagen nach Einlage wieder abgehoben werden, bleiben unverzinst (Respirofrist).

Beispiel (nach Kronfellner/Peschek Bd 2, S. 53):

Ein Sparbuch wird am Fr, 14.1.1994 mit einer Einlage von S 5.000,- eröffnet und zu 2% p.a. verzinst. Welchen Betrag erhält man am Fr, 27.2.1998 ausbezahlt?

Lösung:

Das Ansparen umfasst 3 Phasen:

1	Mo 17.1.94 - 31.12.94	14+11·30 = 344 T.	einfacher unterjähriger Zins
2	1.1.95 - 31.12.97	3 Jahre	Zinseszins
3	1.1.98 - 26.2.98	30+26=56 Tage	einfacher unterjähriger Zins

$$4) K_{31.12.94} = 5000 \cdot (1 + 344/360 \cdot 0,02) \approx 5095,56$$

$$5) K_{31.12.97} = 5095,56 \cdot (1 + 0,02)^3 \approx 5407,45$$

$$6) K_{26.02.98} = 5407,45 \cdot (1 + 56/360 \cdot 0,02) \approx 5424,27$$

## 10.6 Spar- und Tilgungspläne

Mit einem Spar- bzw. Tilgungsplan lassen sich sehr flexibel und in elementarer Weise Finanzierungsmodelle durchrechnen, bei denen sich auch die Zinssätze ändern können, zu den Zinsterminen Ein- bzw. Auszahlungen in variabler Höhe erfolgen usw. Formal sind Spar- und Tilgungspläne gleich aufgebaut; der Hauptunterschied besteht darin, dass die Zahlungen bei Sparplänen i.A. Einzahlungen, bei Tilgungsplänen i.A. Rückzahlungen sind. Sie lassen sich auch ausgezeichnet mit einem Kalkulationsprogramm realisieren.

Grundkonzept eines Spar-/Tilgungsplanes:

	A	B	C	D	E	F
1	Zeit	Kap.Beginn	Zinssatz	Zinsen	Zahlung Ende	Kap. Ende
2	0	<b>1000</b>	<b>10%</b>	100	<b>200</b>	1300
3	1	1300	<b>8%</b>	104	<b>296</b>	1700
4	2	1700	<b>8%</b>	136	<b>0</b>	1836

Eingegeben wird das Anfangskapital (B2) sowie für jede Periode der Zinssatz (Spalte C) und die Höhe der nachschüssigen Zahlung (Spalte E). Die Zinsen (Spalte D) werden aus Kapital und Zinssatz errechnet, das Kapital am Periodenende (Spalte F) als Summe der Spalten B, D und E. Das Anfangskapital jeder weiteren Periode ist gleich dem Endkapital der Vorperiode.

Das hier angeführte Grundkonzept kann je nach Bedarf erweitert oder variiert werden (vgl. z.B. Kronfellner / Peschek S 54)

## 10.7 Antizipativer Zinseszins

Wird ein Kapital über  $n$  Perioden mit einem Diskontsatz  $d$  abgezinst, so ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen  $K_0$  und  $K_n$ :  $K_0 = K_n \cdot (1-d)^n$

Beispiel:  $K_n = 100000$ ,  $d = 8\%$ ,  $n = 2$  liefert  $K_0 = 84640$ ; d.h. bei einem zu einem Diskontsatz  $d = 8\%$  vergebenen Kredit von S 100000 werden S 84640 ausbezahlt, nach zwei Jahren sind S 100000 zurückzuzahlen.

Zu welchem Zinssatz müsste man S 84640,- verleihen, um nach 2 Jahren genau S 10000,- zurückzuerhalten?  
 $100000 = 84640 \cdot (1+i)^2$  bzw.  $(1+i)^2 = 1,1814745..$  bzw.  $i = 0,0869565...$

Man nennt  $d = 0,08$  und  $i = 0,0869565...$  zueinander äquivalent, weil in beiden Varianten dasselbe Anfangskapital zum selben Endkapital führt. Man kann zu den zu  $d$  äquivalenten Zinssatz  $i$  auch direkt berechnen:  $i = d/(1-d)$  und umgekehrt  $d = i/(1+i)$ . (Herleitung siehe Kronfellner/Peschek S 58)

## 10.8 Unterjährige Verzinsung

Es macht einen Unterschied, ob man ein Kapital über 12 Monate mit  $i_{12}=1\%$  p.m. oder über vier Quartale mit  $i_4=3\%$  p.q. oder einmal jährlich mit  $i_1 = 12\%$  verzinst:

Beispiel: Sei  $K_0 = 100.000$

1% p.m. liefert  $K_{12m} = 100.000 \cdot (1,01)^{12} = 112.682,50$

3% p.q. ergibt  $K_{4q} = 100.000 \cdot (1,03)^4 = 112.550,88$

12% p.a. liefert  $K_{1a} = 100.000 \cdot (1,12) = 112.000,00$

Eine monatliche Verzinsung von 1% erhöht das Anfangskapital in einem Jahr um effektiv 12,68%; eine quartalsweise Verzinsung um 3% ergibt eine Effektivverzinsung von 12,55% p.a.

Man bezeichnet bei unterjähriger Verzinsung:

12% nomineller Jahreszinssatz

1% relativer Monatszinssatz (zum nom. Zinssatz 12%)

3% relativer Quartalszinssatz (zu nominell 12% p.a.)

12,68% effektiver Jahreszinssatz zu nominell 12% p.a. bei monatlicher Verzinsung

12,55% effektiver Jahreszinssatz zu nominell 12% p.a. bei quartalsweiser Verzinsung.

Die Zinssätze 1% p.m. und 12,68% p.a. sind zueinander äquivalent, analog 3% p.q. und 12,55% p.a.

## 10.9 Regelmäßige Zahlungen (Rentenrechnung)

Kapitalisierungen mit regelmäßigen Zahlungen zu den Zinsterminen nennt man Renten. Wir betrachten nur dekursiv mit Zinseszins verzinste Renten.

**Rentenrate  $R$ :** regelmäßige Zahlung in fester Höhe

**nachschüssige Rente:** Zahlungen am Periodenende

**vorschüssige Rente:** Zahlungen am Periodenbeginn

**Rentenperiode:** Dauer zwischen zwei Rentenzahlungen

**$i$ :** Zinssatz pro Rentenperiode

**$n$ :** Rentendauer (Anzahl der Rentenperioden)

**$E_n$ :** Endwert einer Rente über  $n$  Rentenperioden. Er entspricht dem Endbetrag eines mit  $i\%$  verzinsten Sparplanes über  $n$  Perioden mit festen regelmäßigen Zahlungen der Höhe  $R$  zu den Zinsterminen.

**$B_n$ :** Barwert einer Rente über  $n$  Rentenperioden. Er entspricht dem Betrag, der zu Beginn der  $n$  Rentenperioden einmalig zum Zinssatz  $i\%$  anzulegen wäre, damit nach  $n$  Rentenperioden genau der Endwert  $E_n$  erreicht wird.

Vereinfacht gesagt entspricht der Endwert dem Wert der Rentenzahlungen am Ende der Rentenlaufzeit, der Barwert dem Wert der Rentenzahlungen am Beginn der Laufzeit. Der Endwert ist stets höher als der Barwert.

Man kann auch Rentenwerte für Zeitpunkte während der Laufzeit der Rente ermitteln, indem man zunächst den Barwert ermittelt und diesen bis zum gewünschten Zeitpunkt mit dem Zinssatz  $i$  kapitalisiert.

## Rentenformeln für nachschüssige Renten:

$$E_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad B_n = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{E_n}{(1+i)^n}$$

Vorschüssige Renten kann man leicht aus den nachschüssigen mittels folgender Beziehungen ermitteln:

$$E_{n(\text{vorschüssig})} = E_{n(\text{nachschüssig})} \cdot (1+i)$$

$$B_{n(\text{vorschüssig})} = B_{n(\text{nachschüssig})} \cdot (1+i)$$

Der vorschüssige End- bzw. Barwert sind um den Faktor  $(1+i)$  höher als die entsprechenden nachschüssigen End- bzw. Barwerte. Damit kann man die obigen Barwert- bzw. Endwertformeln leicht auf vorschüssige Renten adaptieren.

Die Relation  $B_n = \frac{E_n}{(1+i)^n}$  gilt für vorschüssige Renten gleichermaßen wie für nachschüssige.

## 10.10 Finanzmathematik mit Excel-Zielwertsuche

Man hat z.B. ein Arbeitsblatt erstellt, das für die einfache Kapitalverzinsung aus  $K_0$ ,  $i$  und  $n$  das Endkapital  $K_n$  ermittelt.

$$\text{z.B. } K_0 = 1000; \quad i = 0,08; \quad n = 10;$$
$$K_n = K_0 \cdot (1+0,08)^{10} = 2158,92.$$

Nun soll folgende Variante ermittelt werden:

Zu welchem Zinssatz muss  $K_0 = 1000$  verzinst werden, um  $K_{10} = 3000$  zu erhalten?

Dies kann man in Excel auf verschiedene Arten lösen:

- man formt die Zinseszinsformel entsprechend um und schreibt eine entsprechende Excel-Tabelle.
- man sucht unter den Finanzmathematik-Formeln von Excel, ob es dafür bereits eine fertig programmierte Formel gibt.
- Man verwendet die bereits vorliegende Tabelle zur Berechnung des Endkapitals und nutzt das Excel-Tool **Zielwertsuche**.

Die Zielwertsuche ist ein sehr allgemeines und leistungsfähiges Verfahren, mit Standardtabellenblättern Nichtstandardfragen zu beantworten. Das Prinzip der Zielwertsuche ist einfach: man teilt Excel mit, welche Zelle (“veränderbare Zelle”) so lange verändert werden soll, bis in einer anderen Zelle (“Zielzelle”) ein möglichst genau der gewünschte “Zielwert” kommt.

Zielzelle: Endkapital  $K_n$

Zielwert: 3000

veränderbare Zelle: Zinssatz

## Excel-Arbeitsblatt zur einfachen Zinsrechnung

	A	B	C
1	Gegeben:		Zielwertsuche nach Zinssatz:
2	Zinssatz	8%	← veränderbare Zelle
3	n	10	
4	$K_0$	1000	
5	Berechnet:		
6	q	1,08	
7	$K_n$	2158,92	← Zielzelle; Zielwert = 3000
8			
9			

Eingabe für die Standardaufgabe: in Zellen B2:B4.

Berechnet werden:

in Zelle B6 der Aufzinsungsfaktor ( $=1+B2$ )

in Zelle B7 das Endkapital  $K_n$  ( $=B4*B6^B3$ )

Mit der o.a. Zielwertsuche wird in Zelle B2 der Zinssatz so lange variiert, bis in Zelle B7 (möglichst genau) der gewünschte Wert 3000 herauskommt.

Das Konzept der Zielwertsuche erlaubt in Excel das Berechnen von Nichtstandard-Fällen mit dem Standard-Modell ohne Formelumformen.