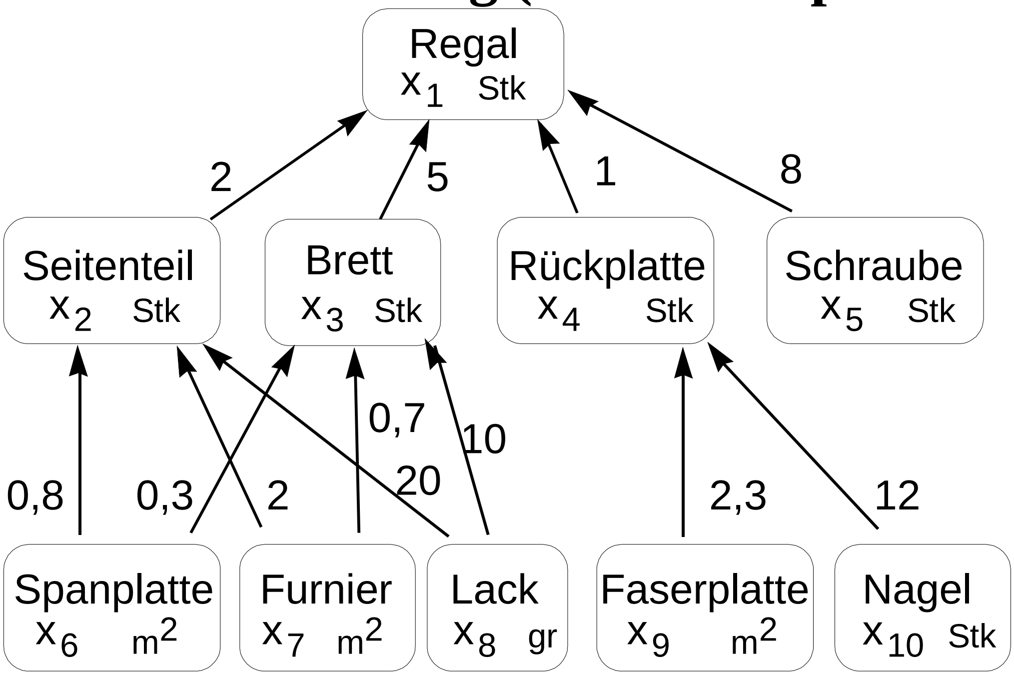
Vorlesung Angew. Mathematik für BWL

8.Woche

8.1 Teilebedarfsrechnung (Stücklistenproblem):



Teilebedarf für ein Regal
dargestellt als Gozintograph

Produktbez.	Ein-heit	Bedarf ges.	extern	Zur Herstellung einer Einheit werden benötigt:
Regal	**Stk**	x_1	**10 Stk.**	**2 Seitenteile; 5 Bretter; 1 Rückpl.; 8 Schr.**
Seitenteil	**Stk**	x_2	**0**	**0,8 m_2 Spanplatte; 2 m_2 Furnier; 20 g Lack**
Brett	**Stk**	x_3	**30 Stk**	**0,3 m_2 Spanpl.; 0,7 m_2 Furnier; 10 g Lack**
Rückplatte	**Stk**	x_4	**0**	**2,3 m_2 Faserplatte; 12 Nägel**
Schraube	**Stk**	x_5	**20 Stk**	
Spanplatte	m_2	x_6	**0**	
Furnier	m_2	x_7	**0**	
Lack	**gr**	x_8	**0**	
Faserplatte	m_2	x_9	**0**	
Nagel	**Stk**	x_{10}	**30 Stk**	

Stücklistentabelle mit vorgeordneten Produkten

Produktbez.	Ein-heit	Bedarf ges.	extern	Produkt wird in folgender Menge für nachgeordnete Produkte benötigt:
Regal	Stk	x_1	10 Stk	
Seitenteil	Stk	x_2	0	2 Stück pro Regal
Brett	Stk	x_3	30 Stk	5 Stück pro Regal
Rückplatte	Stk	x_4	0	1 Stück pro Regal
Schraube	Stk	x_5	20 Stk	8 Stück pro Regal
Spanplatte	m_2	x_6	0	0,8 m2 pro Seitenteil; 0,3 m2 pro Brett
Furnier	m_2	x_7	0	2 m2 pro Seitenteil; 0,7 m2 pro Brett
Lack	gr	x_8	0	20 g pro Seitenteil; 10 g pro Brett
Faserpl.	m_2	x_9	0	2,3 m2 pro Rückplatte
Nagel	Stk	x_{10}	30 Stk	12 Stück pro Rückplatte

Tabelle mit nachgeordneten Produkten

Gleichungsdarstellung:
x_1: Anzahl Regale; x_2: Anzahl Seitenteile;
x_3: Anzahl Bretter; x_4: Anz. Rückplatten usw.

Gesamtbedarf = extrener Bedarf + interner Bedarf

Regal:	$x_1 = n_1$				
Seitenteil:	$x_2 = n_2$	$+\ 2x_1$			
Brett:	$x_3 = n_3$	$+\ 5x_1$			
Rückplatte:	$x_4 = n_4$	$+\ x_1$			
Schraube:	$x_5 = n_5$	$+\ 8x_1$			
Spanplatte:	$x_6 = n_6$		$+\ 0{,}8x_2$	$+\ 0{,}3x_3$	
Furnier:	$x_7 = n_7$		$+\ 2\,x_2$	$+\ 0{,}7x_3$	
Lack:	$x_8 = n_8$		$+\ 20x_2$	$+\ 10x_3$	
Faserplatte:	$x_9 = n_9$				$+\ 2{,}3x_4$
Nagel:	$x_{10} = n_{10}$				$+\ 12\,x_4$

Entspricht der Tabelle der **nachgeordneten** Produkte!

Lösung:

			10	20	80	10	
Regal:	$x_1 =$	10					
Seitenteil:	$x_2 =$	0	$+\ 2x_1$				$= 20$
Brett:	$x_3 =$	30	$+\ 5x_1$				$= 80$
Rückplatte:	$x_4 =$	0	$+\ x_1$				$= 10$
Schraube:	$x_5 =$	20	$+\ 8x_1$				$= 100$
Spanplatte:	$x_6 =$	0		$+\ 0{,}8x_2$	$+\ 0{,}3x_3$		$= 40$
Furnier:	$x_7 =$	0		$+\ 2\,x_2$	$+\ 0{,}7x_3$		$= 96$
Lack:	$x_8 =$	0		$+\ 20x_2$	$+\ 10x_3$		$=1200$
Faserplatte:	$x_9 =$	0				$+\ 2{,}3x_4$	$= 23$
Nagel:	$x_{10} =$	30				$+\ 12\,x_4$	$= 150$

Man kann diesen Typ LGS durch sukzessives Einsetzen ohne weiteres Umformen (Gauß, Matrizeninv., Solver...) lösen!

Achtung! Standardfehler beim Aufstellen des LGS zum Stücklistenproblem: Sie dürfen **keinesfalls** die Gleichungen folgend aufstellen:

$x_1 = 2x_2 + 5x_3 + 1x_4 + 8x_5$ usw. DAS IST FALSCH!!!!

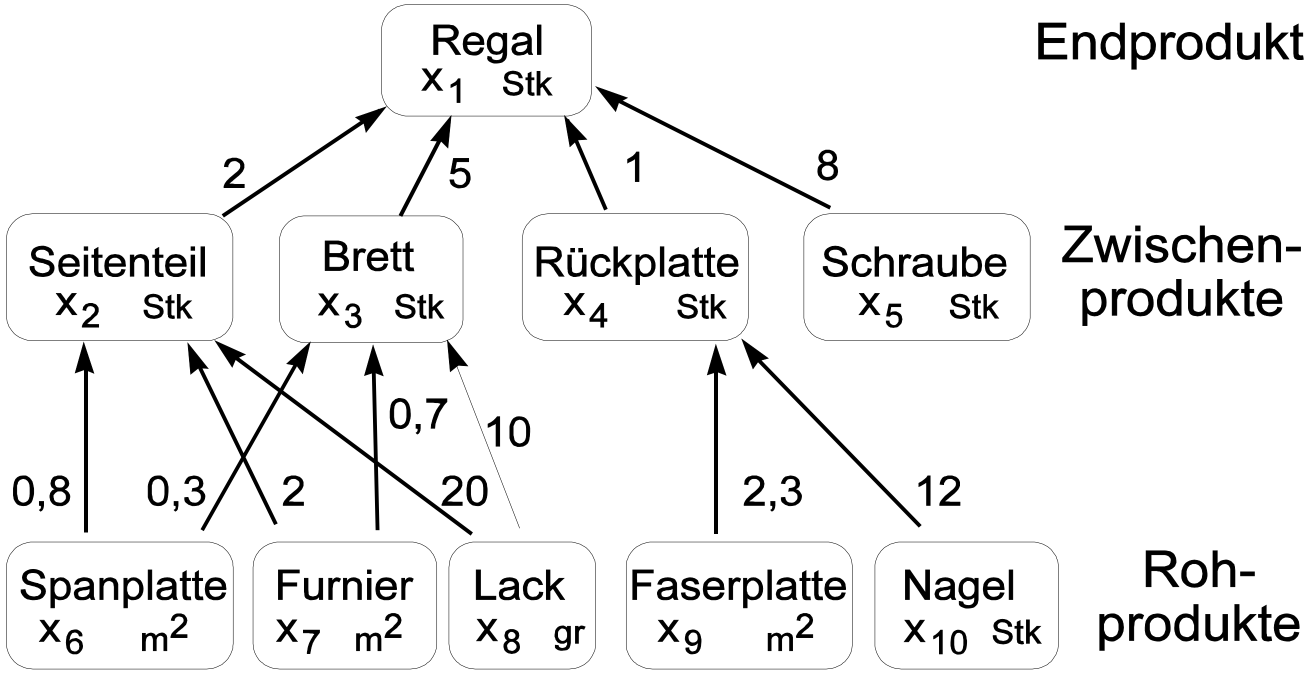
etwa gemäß der Überlegung: ein Regal (x_1) besteht aus 2 Seitenteilen (x_2), 5 Brettern (x_3), einer Rückwand (x_4) und 8 Schrauben (x_5). Diese Überlegung ist vollkommen verkehrt, weil x_1 nicht ein Regal, sondern die Anzahl der herzustellenden Regale ist. Genauso ist x_2 nicht ein Seitenteil, sondern die Anzahl der zu produzierenden Seitenteile usw. (vgl. Studenten-Professoren-Aufgabe!)

8.2 Materialverflechtung:

ist ein Sonderfall der Teilebedarfsrechnung

Rohprodukte (R) ➜ Zwi-Pr.(Z) ➜ Endprod. (E)

Übergänge A: R ➜ Z bzw. B: Z ➜ E werden durch I-O Matrizen A,B beschrieben. Das Matrizenprodukt A·B beschreibt dann den Teilebedarf an Rohprodukten für Endprodukt.



Beispiel:

Matrix A: R➜Z:

Rohpr.↓	Seitt.	Brett	RüPl	Schr.
Sp.pl.	0,8	0,3	0	0
Furnier	2	0,7	0	0
Lack	20	10	0	0
Faserpl.	0	0	2,3	0
Nagel	0	0	12	0

Matrix B: Z ➜ E

ZwiPr.↓	Regal
Seitent.	2
Brett	5
Rückpl.	1
Schraube	8

A x B = $(3{,}1;\ 7{,}7;\ 90;\ 2{,}3;\ 12)^T$

D.h.: pro Regal benötigt man 3,1m^2 Spanplatte; 7,7m^2 Furnier; 90g Lack; 2,3m^2 Faserplatte; 12 Nägel.

8.3 Input-Output-Modelle (Leontief-Modelle)

Idee: Wieviel müssen die einzelnen Sektoren einer Volkswirtschaft produzieren, daß sowohl der *interne Bedarf* (für andere Sektoren) wie auch der *externe Bedarf* (außerhalb des betrachteten Modells benötigte Bedarf) gedeckt ist?

Offenes Leontief-Modell: externer Bedarf ≠ 0. Die Lösung eines offenen Leontief-Modells ist i.a. eindeutig. Bedeutung der Variablen: Gesamtproduktionsmenge je Sektor (ähnlich wie bei Teilebedarfsrechnung).

Geschlossenes Leontief-Modell: externer Bedarf = 0 (Parameterlösung mit 1 Parameter; eindeutige Lösung durch Zusatzbedingung)
Bedeutung der Variablen: Verrechnungswerte je Leistungseinheit für jeden Sektor (ähnlich wie bei der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung)

Leontief-Modelle lassen sich folgend darstellen:
- Input-Output-Graphen bzw. Gozintographen
- lineare Gleichungssysteme
- Input-Output-Matrizen

8.3.1 Offenes Leontief-Modell:

primitive Nationalökonomie mit 2 Sektoren:

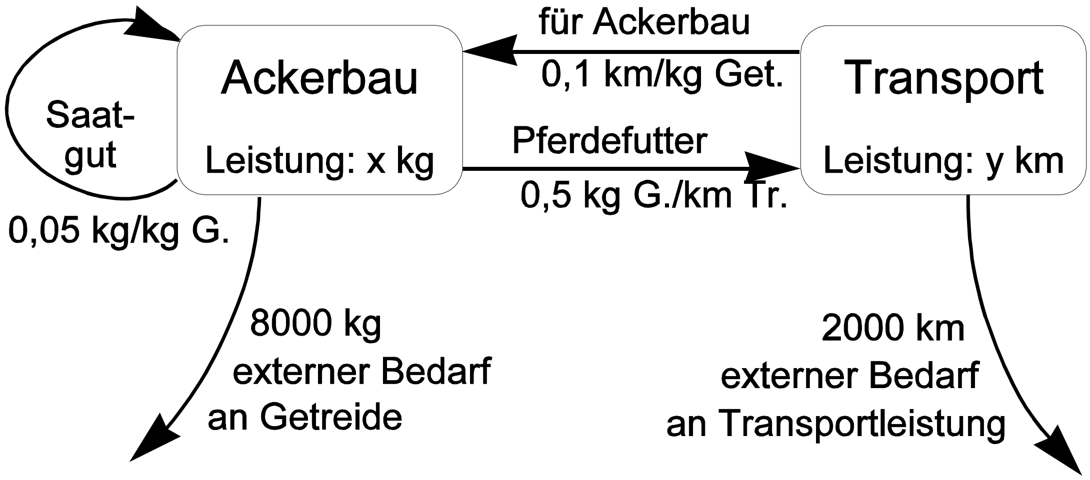


Abb. 3 Primitive Nationalökonomie - Input-Output-Graph

externer Bedarf Getreide: Ernährung der Menschen
externer Transportbedarf: Ausreiten, Jagd, Krieg, etc.

Gleichgewichtsbedingung:

Sektor:	Gesamtbedarf	= externer + interner Bedarf
Ackerbau:	x	$= 8.000 + 0{,}05x + 0{,}5y$
Transport:	y	$= 2.000 + 0{,}1\,x$

bzw. umgeformt:

$$\begin{aligned} 0{,}95\,x - 0{,}5y &= 8000 \\ -0{,}1x + y &= 2000 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem besitzt die eindeutige Lösung:

x= 10000 kg Getreide
y= 3000 km Transport

um int. + ext. Bed. zu decken.

8.3.2 Input-Output-Matrizen

Mit Hilfe von Input-Output-Matrizen (I-O-Matrizen) können die wechselseitigen wirtschaftlichen Abhängigkeiten zwischen den Sektoren einer Volkswirtschaft beschrieben werden. Eine I-O-Matrix gibt an, wieviel Leistungseinheiten von einem Sektor für jede Leistungseinheit eines anderen Sektors bereitstellen muss, damit insgesamt der interne Bedarf der Volkswirtschaft gedeckt wird. Konstruktionsprinzip: Von Zeile an Spalte. Aus der I-O-Matrix und dem externen Bedarf kann unmittelbar ein offenes Leontief-Modell aufgestellt und gelöst werden.

Im letzten Beispiel lautet die I-O-Matrix A: $\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$;

das LGS hat insgesamt die Matrixgestalt: $X = B + A \times X$ bzw. umgeformt $(E-A) \times X = B$

mit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$; E: Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Vektorgleichung $(E-A) \times X = B$ besitzt die eindeutige Lösung $X = (E-A)^{-1} \times B$. Man muss also die sogenannte **Leontief-Inverse** $(E-A)^{-1}$ der I-O-Matrix A mit dem externen Bedarf B multiplizieren, um den Gesamtbedarf X an Leistungseinheiten für alle Sektoren der Volkswirtschaft zu erhalten.

Beachte:

- Die Leontief-Inverse ist nicht die Inverse der I-O-Matrix A, sondern die Inverse der Matrix (E-A).
- Die Berechnung von offenen Leontief-Modellen mittels Leontief-Inverser ist besonders dann vorteilhaft, wenn verschiedene rechte Seiten (z.B. mehrere Jahre) bei gleicher I-O-Matrix durchzurechnen sind (siehe folgendes Beispiel).

Man kann in unserem Beispiel das Gleichungssystem folgend in Matrixform darstellen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X = B + A \times X \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

$$(E - A) \times X = B$$

Man erhält die eindeutige Lösung dieses LGS, indem man die rechte Seite mit der Inversen von (E-A) multipliziert:

$$(E\text{-}A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}11111 & 0{,}55556 \\ 0{,}11111 & 1{,}05556 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 9{,}5 \end{pmatrix} \text{ und damit}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E\text{-}A)^{-1} \times B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 9{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Ändert sich (in einem neuen Jahr) der externe Bedarf B (bei gleichbleibender Struktur der Nationalökonomie; d.h. die I-O Matrix A und damit auch die Matrizen (E-A) sowie die Leontief-Inverse $(E\text{-}A)^{-1}$ bleiben unverändert), dann erhält man den neuen Gesamtbedarf sofort, indem man $(E\text{-}A)^{-1}$ mit dem neuen B multipliziert: sei z.B.

$B_{neu} = \begin{pmatrix} 7300 \\ 2500 \end{pmatrix}$, dann ergibt dies einen Gesamtbedarf

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E\text{-}A)^{-1} \times B_{neu} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 9{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7300 \\ 2500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9500 \\ 3450 \end{pmatrix}$$

8.3.3 Geschlossenes Leontief-Modell:

ähnlich wie innerbetr. Leistungsverr., ext. Bedarf = 0!

Beispiel:

Gemüsebauer (G), Obstbauer (O) und Weinbauer (W) tauschen gegenseitig Leistungen (ohne Bezahlung) aus.

	an G	an O	an W	Wert je ME
von G	-	70kg	80 kg	kg Gemüse: x
von O	60 kg	-	40 kg	kg Obst: y
von W	210 l	82 l	-	l Wein: z

Gleichgewichtsbed:

Wert des Gelieferten = Wert des Erhaltenen

Gemüsebauer: $150\,x = 60y + 210z$

Obstbauer: $100\,y = 70x + 82z$

Weinbauer: $292\,z = 80x + 40y$ bzw.

	x	y	z	RS
Gemüse	150	-60	-210	0
Obst	-70	100	-82	0
Wein	-80	-40	292	0
Gemüse	1	-0,4	-1,4	0
Obst	0	72	-180	0
Wein	0	-72	180	0
Gemüse	1	0	-2,4	0
Obst	0	1	-2,5	0
Wein	0	0	0	0

Gem: $x - 2{,}4\,z = 0$

Obst: $y - 2{,}5\,z = 0$

Parameter-Lösg: Setze z = t; dann ist x=2,4t; y = 2,5t;

Zusatzannahme: Obstbauer setzt 1 kg Obst = 25 ÖS ➜

y = 2,5t = 25 ÖS ➜ z = t = 10 ÖS; x = 2,4t = 24 ÖS.