

Das Messen als fundamentale Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Andreas Vohns

Rettet die Ideen!

So betitelte Ende der siebziger Jahre VOLLRATH einen Artikel¹, in dem er auf die Gefahren eines Mathematikunterrichts hinwies, der sich im Abarbeiten vorgefertigter Kalküle und Standardverfahren zu verlieren drohe. Welche Substanz hätte ein Mathematikunterricht, wenn die Schülerinnen und Schüler am Ende ihrer Schulzeit nicht wenigstens einen Einblick in die zentralen, grundlegenden Ideen des Faches gewonnen hätten?

Aber welche Ideen sollen dies sein und wie soll eine Orientierung an fundamentalen Ideen im Unterricht umgesetzt werden? Diese Fragen waren es, die mich in meiner Staatsarbeit leiteten. Die Diskussion um sogenannte „fundamentale Ideen“, „zentrale Ideen“ oder auch „Grundideen“ zieht sich wie ein roter Faden durch die mathematikdidaktische Diskussion der letzten dreißig Jahre. Als ich mich mit diesem Thema beschäftigte, waren es zuletzt die Diskussion um TIMSS einerseits und um den Allgemeinbildungsauftrag des Faches Mathematik andererseits, die auch diese Fragen wieder in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit gerückt hatten.

Gerade in bezug auf die Frage, welche Konsequenzen aus der Orientierung an fundamentalen Ideen für den Mathematikunterricht zu ziehen seien, gingen die Antworten teilweise weit auseinander. Ich entschied mich für die *Idee des Messen* als einem konkreten Beispiel, an dem ich untersuchen wollte, wie leistungsfähig fundamentale Ideen für die didaktische Analyse einzelner mathematischer Inhalte sein können. Dahinter stand die Überzeugung, dass sie nur durch diese Art der Anwendung überhaupt zu einer Kategorie werden, die auch Konsequenzen für die Konzeption, Planung und Durchführung von Mathematikunterricht haben kann.

In einer Hinsicht muss ich die Leserinnen und Leser allerdings an dieser Stelle enttäuschen: Auch wenn es sich beim Messen sicherlich anböte, anwendungsbezogene Aspekte standen nicht im Vordergrund meiner Arbeit. Die Diskussion um mathematische Grundbildung im Umfeld der PISA-Studie macht diese Schwerpunktsetzung auf den ersten Blick problematisch, steht doch hier die Fähigkeit, mathematische Begriffe als Werkzeuge gerade in *außermathematischen Kontexten* einzusetzen, im Vordergrund. Vielleicht kann das vorliegende Exposé aber verdeutlichen, wie es zu dieser Schwerpunktsetzung kam und warum ich – soviel sei vorweggenommen – auch heute noch zu ihr stehe.

Was sind fundamentale Ideen?

Die Frage scheint auf den ersten Blick fast banal und in der Tat finden sich mit den Ideen *Zahl*, *Messen*, *funktionaler Zusammenhang*, *Algorithmus* und *Optimieren* einige Kandidaten für fundamentale Ideen, die in kaum einer Aufzählung fehlen. Die Wege hingegen, wie man zu diesen Ideen kommt und die Implikationen für den Mathematikunterricht, gehen weiter auseinander, als ich dies zunächst erwartet hatte.

¹ Vollrath 1978

Ideengeschichtliche Annäherung

Die Idee, das mathematische Curriculum an zentralen, fundamentalen Ideen auszurichten, ist alles andere als neu. Bereits WHITEHEAD hat zu Anfang des vorherigen Jahrhunderts angesichts von Stofffülle und Stoffisolation die Orientierung an einigen wenigen grundlegenden, universellen Ideen der Mathematik vorgeschlagen².

Im Anschluss an BRUNER hielt die Orientierung an fundamentalen Ideen in den sechziger Jahren vermehrt Einzug in die Curriculumdiskussion. In seinem Buch „Der Prozeß der Erziehung“ vertrat er drei zentrale Thesen:

- Die Tätigkeit von Wissenschaftler und Kind unterschieden sich nicht primär in der Art, sondern nur im Niveau voneinander.
- Jedem Kind sei jeder Lehrgegenstand auf eine ihm angemessene Art zu vermitteln.
- Dazu gelte es, sich auf die *fundamentalen Ideen* des Faches, seine grundlegenden Strukturen zu beschränken und diese allmählich, in immer tieferer Durchdringung, spiralförmig zu entwickeln.

Konkrete Beispiele für fundamentale Ideen im Bereich der Mathematik blieben aber aus, darüber sollten sich die „fähigsten Hochschullehrer und Wissenschaftler“³ verständigen. Es ist kaum verwunderlich, dass die Rezeption von BRUNERS Arbeit im Zuge der scientistisch geprägten „New Math“-Welle sehr einseitig ausfiel. BRUNERS Rede von der „structure of the discipline“ machte die „fertige“ Hochschuldisziplin Mathematik mit den ihr zugrunde liegenden Mutterstrukturen zu ihrem Leitbild (Bourbakismus)⁴. BRUNERS vehementes Plädoyer für entdeckendes Lernen wurde ignoriert, Fragen nach der Sinnhaftigkeit mathematischer Begriffe für die schulisch begrenzten Anwendungsfelder wurden ausgeklammert. Die Schulen des 20. Jahrhunderts sollten Mathematik des 20. Jahrhunderts lehren. Die Wissenschaftsorientierung blieb formal und oberflächlich, die unterrichtlichen Erfolge bescheiden.

Erst Mitte der siebziger Jahre rückte das Konzept der Orientierung an fundamentalen Ideen aufgrund der Diskussion durch WITTMANN⁵ und SCHREIBER⁶ stärker in die ursprünglich von BRUNER intendierte Richtung entdeckenden Lernens in sinnstiftenden Kontexten. Diese Phase ist gekennzeichnet durch eine stärkere Orientierung an der *Mathematik als Prozess* und ein Aufgreifen der Sinnfrage, insbesondere durch die Thematisierung der in der Mathematik enthaltenen Kategorien und Denkmuster des Alltagsverstandes, deren Spuren es auch im mathematischen Denken aufzuspüren gelte. Fundamentale Ideen hatten nun nicht mehr alleine disziplinär mathematischen Kriterien zu genügen, sondern ihre Anwendbarkeit in schulrelevanten Teilgebieten zu beweisen und sich fachdidaktischen Prinzipien (z.B. genetische Methode, Interaktion der Darstellungsformen) unterzuordnen.

SCHREIBER verknüpfte das Konzept zudem mit der historisch-genetischen Methode und schlug die Suche nach *bereichsspezifischen, zentralen Ideen* als Konkretisierung der *allgemeinen, universellen Ideen* vor. Daran anknüpfend entwickelten in den achtziger Jahren TIETZE/ KLIKA/ WOLPERS eine Unterscheidung in *Leitideen, bereichsspezifische Strategien und zentrale Mathe-*

² Vgl. Whitehead 1962.

³ Bruner 1973, S. 32.

⁴ Vgl. Heymann 1996, S. 164-168.

⁵ Vgl. Wittmann 1981.

⁶ Vgl. Schreiber 1979.

*matisierungsmuster*⁷, wobei erstmals ein induktives Vorgehen (von den bereichsspezifischen Strategien hin zu den allgemeinen Leitideen) in die Diskussion kam. Die zentralen *Mathematisierungsmuster* thematisieren die Beziehung der Mathematik zum „Rest der Welt“. Bei Ihnen wird sowohl an typische Anwendungen der Mathematik in anderen Wissenschaften gedacht, als auch daran, dass mathematisches Denken vielfach eine spezifisch erweiterte Form alltäglichen Denkens darstellt.

Diesen Gedanken griff auch SCHWEIGER auf, der forderte, fundamentale Ideen müssten an archetypische Denkmuster anknüpfen. Die wesentliche Weiterentwicklung seines Kriterienkataloges gegenüber dem von Schreiber besteht darin, methodische Konsequenzen, die über die reine Auswahl von Lehrgegenständen und ihre altersgemäße Repräsentation hinaus gehen, zu einem integralen Bestandteil der Bestimmung fundamentaler Ideen zu machen. SCHWEIGER hofft, dass die Beschäftigung mit fundamentalen Ideen neben der Anknüpfung an ursprüngliche Denkmuster zum Sprechen über Mathematik anregt und die Durchsichtigkeit des Unterrichts erhöht⁸.

Mit SCHWEIGER war die Diskussion um fundamentale Ideen zunächst abgeschlossen. Sie hatten sich von einer rein systematischen Kategorie zu einer genuin fachdidaktischen gewandelt, waren nicht mehr in erster Linie fundamentale Ideen der Mathematik – im Sinne einer herunter transformierten Universitätsmathematik –, sondern fundamentale Ideen *für den Mathematikunterricht*. Obgleich die fachdidaktische Forschung ihnen zunehmend auch unterrichtspraktische Bedeutung zuschrieb, bleiben sie in ihren tatsächlichen Auswirkungen vielfach auf Legitimationsaspekte in den Präambeln der Lehrpläne beschränkt.

In den neunziger Jahren betrachtet HEYMANN im Rahmen der Allgemeinbildungsfrage die Rolle zentraler Ideen vor dem Hintergrund der „Stiftung kultureller Kohärenz“ und kommt zu dem Schluss, zentrale Ideen müssten vor allem *Schnittstellen zwischen Mathematik und Welt* markieren⁹. Auch hier zeigt sich, wie stark die Diskussion um fundamentale Ideen von der allgemeinen didaktischen Diskussion beeinflusst ist. Plausibel ist Heymanns Einschränkung des Begriffs zentraler Ideen auf ihre anwendungsbezogenen Komponente nämlich nur vor dem Hintergrund seiner Allgemeinbildungskonzeption. Eine Idee mathematischer Bildung, die in der Tradition von Wittenberg stärker auch die Bedeutung der Mathematik als „deduktiv geordnete Welt eigener Art“¹⁰ betont, wird einen Begriff fundamentaler Ideen vorziehen, der auch die Brüche mathematischen und alltäglichen Denkens für relevant erachtet und innerfachlicher Kohärenz und genetischer Entfaltung mathematischer Begriffsbildungen mehr Bedeutung zugesteht.

Eine einheitliche Linie in der Diskussion um fundamentale Ideen gibt es in den neunziger Jahren nicht. Neben Heymann sind mit BAIREUTHERS Konzeption *zentraler Ideen*¹¹ und mit den *Kernideen*¹² von GALLIN/ RUF Konzepte entwickelt worden, die nicht die Mathematik oder ihre Verbindung zum alltäglichen Denken in den Mittelpunkt stellen, sondern eher das Unterrichtsgeschehen (BAIREUTHER) oder die subjektiven Zugänge der Schülerinnen und Schüler (GALLIN/ RUF) als Ausgangspunkte haben.

⁷ Vgl. Tietze/ Klika/ Wolpers 1982.

⁸ Schweiger 1992.

⁹ Vgl. Heymann 1996.

¹⁰ Winter 1996, S. 37.

¹¹ Vgl. Baireuther 1990.

¹² Vgl. Gallin/ Ruf 1998.

Vorläufige Begriffsbestimmung

Als ich während meiner Staatsarbeit an diese Stelle gelangte, war ich durchaus überrascht, wie schwer es ist, allein für die Kriterien zur Bestimmung fundamentaler Ideen einen halbwegs einheitlichen Stand der Forschung anzugeben. Für die weitere Arbeit schien es mir aber sinnvoll, eine eigene, vorläufige Begriffsbestimmung fundamentaler Ideen anzugeben. Sie resultierte in einigen Thesen, die unten aufgeführt sind.

Fundamentale Ideen...

- (1) ... sind der Versuch, **Mathematik als sinnvolles, zusammenhängendes Ganzes zu verstehen. Sie beugen Stoffisolation vor und ermöglichen Stoffauswahl.**
- (2) ... lassen sich nicht allein aus der Struktur des Gegenstandes ableiten. Sie sind insbesondere nicht Grundlagen einer axiomatischen Theorie.
- (3) ... verdeutlichen den prozesshaften Charakter von **Mathematik auf der Basis von in der Schule erfahrbaren Phänomenen. Dadurch können sie etwas von dem vermitteln, was Mathematik als Wissenschaft ausmacht.**
- (4) ... sind nicht esoterisch, sondern allenfalls abstrakt. Sie lassen sich aber auf unterschiedlichen Niveaustufen konkretisieren und durchziehen so das Schulcurriculum vertikal.
- (5) ... tauchen als *universelle Ideen* in vielen Teilgebieten der Mathematik auf. Es gibt ein ganzes Netzwerk *bereichsspezifischer Strategien*, die mit solchen universellen Ideen in Beziehung gesetzt werden können.
- (6) ... haben Ursprünge im alltäglichen Denken und kommen oftmals als **Mathematisierungsmuster in außermathematischen Feldern vor.**
- (7) ... hinterlassen Spuren in der Geschichte der Mathematik. Sie verweisen auf die **historische Genese von Begriffen, Theorien und Denkweisen, die auch für den Unterricht von Interesse sein kann.**

Fundamentale Ideen und Mathematikunterricht

Mit dieser vorläufigen Begriffsbestimmung fundamentaler Ideen ist faktisch auch eine Entscheidung für ein bestimmtes Verständnis von Mathematikunterricht verbunden. Sie stellt eine normative Setzung dar, dass muss hier klar eingeräumt werden. Wenn im folgenden methodische Konsequenzen aus der Orientierung an fundamentalen Ideen gezogen werden, so werden fundamentale Ideen als integraler Bestandteil eines *genetischen Mathematikunterrichts* verstanden.

Diese Setzung ist keinesfalls offensichtlich. Das scientistische Verständnis fundamentaler Ideen ist bequemer, da es das Normenproblem an die Fachwissenschaft zurückweist, bzw. so tut, als ob die Fachwissenschaft das Normenproblem bereits hinreichend gelöst hätte¹³.

Fundamentale Ideen sind in erster Linie eine *stoffdidaktische* Kategorie, sie dienen in erster Linie zur *Sachanalyse mathematischer Gegenstände*. Eine *didaktisch orientierte* Sachanalyse muss

¹³ Die Mathematik selbst sagt dann, *was und wie* Mathematikunterricht zu allgemeiner Bildung und Erziehung beiträgt. Man vergleiche dazu die These 20 bei Führer 1997, S. 82.

sich aber auf gewisse Paradigmen allgemeiner Fachdidaktik und Erkenntnisse der Lehr- Lernforschung einlassen.

Ich will nicht verschweigen, dass mich die Konfrontation der Orientierung an fundamentalen Ideen mit der Vorstellung vom Lernen als konstruktivem, kumulativen und situativ bedingten Prozess einige Mühe gekostet hat. Dennoch möchte ich Ihnen diese – hoffentlich produktive – Störung nicht vorenthalten.

Kumulatives Lernen und fundamentale Ideen

Kommen wir noch einmal auf BRUNER zurück. Seines Erachtens sollen fundamentale Ideen jedem Kind auf jeder Entwicklungsstufe in einer angemessenen Form näher gebracht werden können. Diese Hypothese wird von BRUNER mit zwei Forderungen verbunden:

- Das Curriculum soll im Laufe der Schulzeit immer wieder, auf verschiedenen Niveaus und unter anderen Gesichtspunkten auf diese Ideen zurückkommen (*Spiralprinzip*).
- Bei der Vermittlung der Ideen, vor allem aber bei der Erstbegegnung mit einem Sachverhalt, ist an das intuitive Denken und Verstehen des Kindes zu appellieren.

Beide Forderungen wurden von WITTMANN näher konkretisiert. Die erste wurde zu den Prinzipien des vorwegnehmenden Lernens und der Fortsetzbarkeit, die zweite zum Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen. Vorwegnehmendes Lernen heißt, nicht so lange mit der Bearbeitung eines Stoffes zu warten, bis dieser abschließend behandelt werden kann, sondern auch unvollständige Annäherungen zu erlauben. Fortsetzbarkeit bedeutet, dabei keine Vorstellungen aufzubauen, die später hinderlich sein könnten, weil sie letztlich nicht sachgerecht sind. Mit der Interaktion der Darstellungsformen wird die Bedeutung unterschiedlicher Darstellungsebenen – enaktiv (handelnd), ikonisch (bildlich, zeichnerisch) und symbolisch (in Sprache und Formeln) – hervorgehoben.

Spiralprinzip, vorwegnehmendes und fortsetzbares Lernen finden ihre Begründung in der Vorstellung von Lernen als kumulativem Prozess. In den Worten der BLK Kommission bedeutet dies, dass sich Lernanstrengungen nur dann lohnen, „wenn ersichtlich ist, was man hinterher kann. Schülerinnen und Schüler, die sich über mehrere Jahre mit mathematischen und naturwissenschaftlichen Inhalten auseinandersetzen, müssen spüren können, daß sie in ihrer fachbezogenen Kompetenzentwicklung sukzessive voranschreiten[...]. Voraussetzung für das Erfahren von Kompetenzzuwachs ist eine kohärente und kumulative Sequenzierung des Lehrstoffs. Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht gewinnt Kohärenz durch vertikale Verknüpfungen, die zwischen früheren, aktuellen oder auch zukünftigen Lerninhalten hergestellt werden“¹⁴. Grundlage einer solchen Vernetzung können aber gerade universelle Ideen seien, die immer wieder zu zentralen Ideen in unterschiedlichen Stoffbereichen konkretisiert werden. Dadurch besteht auch die Möglichkeit, verstärkt Beziehungen zwischen den klassischen Stoffgebieten der Sekundarstufe I (Arithmetik, Algebra, Geometrie, Stochastik) herzustellen, ebenfalls ein Thema bei der deutsche Mathematikunterricht nach Ansicht des PISA-Konsortiums Nachholbedarf hat¹⁵.

¹⁴ BLK 1997, S. 34, Vgl. hierzu auch Borneleit/ Danckwerts/ Henn/ Weigand 2001, S. 82.

¹⁵ Neubrand, u.a. 2001, S. 45ff

Konstruktives Lernen und fundamentale Ideen

Lernen als konstruktiven Prozess aufzufassen bedeutet, den aktiven Konstruktionen von Schülerinnen und Schülern eine herausragende Rolle für den Lernprozess einzuräumen. Sie sollen neue Erkenntnisse möglichst selbstständig und selbsttätig entwickeln. GALLIN/ RUF sprechen vom „Lernen auf eigenen Wegen“. Stehen ihnen fundamentale Ideen, die von außen an sie herangebracht werden dabei nicht im Weg? Müssen Sie nicht für sich selbst diejenigen Leitideen finden, die Ihnen eine optimale Strukturierung ihres Wissens erlauben?

Es ist sehr schwierig zu sagen, welche Rolle fundamentale Ideen bei der Konstruktion von Wissen spielen können. Klar ist, dass es nicht in erster Linie um das „Beibringen“ und „Einprägen“¹⁶ vom Lehrer vorgegebener Ideen gehen kann. Klar ist aber auch, dass es wenig dienlich sein kann, gerade solche zentralen und universellen Ideen, die die Mathematik in ihrer geschichtlichen Entwicklung durchgehend beschäftigt haben und eine Vielzahl von Phänomenen im Erfahrungsbereich der Lernenden ordnen können, im Unterricht überhaupt nicht fruchtbar werden zu lassen.

Ich denke daher, es ist sinnvoll, zwei Aspekte fundamentaler Ideen zu unterscheiden: Unbestritten haben fundamentale Ideen einen *Rückschauaspekt*: Universelle Ideen können als Instrument globaler Unterrichts- und Curriculumplanung dienen, zentrale Ideen als Instrument regionaler Unterrichtsplanung in einzelnen Stoffgebieten. Bei der lokalen Unterrichtsplanung können fundamentale Ideen dem Lehrenden hilfreich bei der Suche nach adäquaten *Grundvorstellungen*¹⁷ sein. So gesehen sind sie eine Kategorie, die der Rekonstruktion von Wissen dient¹⁸.

Der *Vorschauaspekt* fundamentaler Ideen räumt Ihnen hingegen auch für die Konstruktion von Wissen Bedeutung ein: Als bereichsspezifische Strategien können fundamentale Ideen Anlässe zur Erarbeitung neuer Sachverhalte darstellen, heuristische Kraft entfalten. Neues Wissen entsteht meist, wenn altes Wissen als unzureichend erkannt wird. In diesem Sinne können fundamentale Ideen u.U. als „produktive Störungen“ wirken. In beiden Fällen stützen sie konstruktives Lernen: Zum einen sollen fundamentale Ideen im alltäglichen Denken einen Archetyp haben. Möchte man genetisches Lernen initiieren, können solche Archetypen vielleicht zum Ausgangspunkt von Heuristiken für einen ganz eigenen Zugang zur Mathematik werden. Manchmal aber wird man an Grenzen stoßen, die ein Umdenken erforderlich machen. Solche Stellen könnten es sein, die einen Übergang zur regulären Welt der Mathematik nützlich erscheinen lassen.

Daneben haben fundamentale Ideen sicherlich auch einen *Gegenstandsaspekt*, d.h. sie können selbst zum Gegenstand des Unterrichts werden. Wenn es im Unterricht für Schülerinnen und Schüler offensichtlich um Optimierung geht, dann darf man das Kind auch beim Namen nennen und die Gelegenheit ist sicherlich günstig für einige allgemeine Überlegungen zum Optimieren. Interessanter finde ich allerdings etwa die Frage, wie man sich die Idee des funktionalen Zusammenhanges nutzbar machen kann, wenn es gerade einmal nicht explizit um Funktionen geht¹⁹.

¹⁶ Gallin/ Ruf 1998, S. 75.

¹⁷ Zur Kategorie „Grundvorstellungen“ werden sowohl normativ-didaktische Zielkategorien des Lehrenden als auch individuelle Erklärungsmodelle der Lernenden bezeichnet. Vgl. vom Hofe 1992, S. 358f.

¹⁸ Vgl. Danckwerts 1988, S. 156

¹⁹ Ist nicht gerade das auch eine der Ideen, die hinter dem operativen Prinzip stecken? Vgl. Wittmann 1981, S. 79ff.

Messen als universelle Idee

Messen bedeutet immer Vergleichen. Wer wissen möchte, ob ein Schrank in eine bestimmte Ecke seines Zimmers passt, wird froh sein, ein Maßband zur Hand zu haben. Messen ist meist ein indirektes Vergleichen: Ich muss den Schrank nicht erst in die Ecke stellen, um zu wissen, ob er passt. Ich messe seine Breite und ich messe den Platz.

Ganz allgemein kann Messen als indirektes Vergleichen verstanden werden. Üblicherweise wird dieses Vergleichen auf der Basis von Zahlen vorgenommen. Eine Basiseinheit wird bestimmt, auf deren Grundlage dann der zahlenmäßige Vergleich erfolgen kann. Jedes reale Messen ist ein approximatives Verfahren: es ist mit Ungenauigkeiten behaftet. Wichtig ist, diesen Fehler kontrollierbar zu halten.

Ein Beispiel aus dem Krankenhausalltag: Zur Bestimmung des Pulses kann man die Schläge in einem kurzen Zeitintervall (z.B. 15 sec) zählen und in die Pulsfrequenz (Schläge pro Minute) hochrechnen, oder aber man stoppt die Zeit für z.B. 50 Pulsschläge und ermittelt dann indirekt die Pulsfrequenz. Warum die zweite Methode die praktikablere und genauere ist, kann eine anregende Fragestellung für den Mathematikunterricht sein, die einen Einstieg in Fehler- und Näherungsrechnungen liefert.

Messen ist im alltäglichen Denken fest verwurzelt. Neben dem Abzählen (im Sinne von Anzahlbestimmungen) gehört das Messen zu den frühesten mathematischen Fähigkeiten, die Kinder entwickeln. Das Messen spielt erwartungsgemäß für das Curriculum der Grundschule eine zentrale Rolle im Rahmen des Aufbaus adäquater Messvorstellungen für das elementare Sachrechnen. In der Sekundarstufe I kommen in der Geometrie mit Flächen- und Rauminhalten neue Messprobleme auf die Lernenden zu. Messen ist allerdings nicht auf das Rechnen mit Größen beschränkt. Es kann als Grundprinzip von Teil- und Vervielfachungsprozessen ganz allgemein angesehen werden. Wer den größten gemeinsamen Teiler von zwei natürlichen Zahlen bestimmt, sucht genauso ein gemeinsames Maß wie derjenige, der zwei Brüche auf den Hauptnenner bringt, um sie anschließend zu addieren. Auch in der höheren Schulmathematik kann man messen: Bei der Bearbeitung des Integralbegriffs kann die Diskussion über die Flächenmessung von krummlinig begrenzten Flächen aufgegriffen werden; man erhält ein potentes Mittel, mit dem sich einer Vielzahl solcher Flächen plötzlich eindeutig Maßzahlen zuordnen lassen.

Mit wieder anderen Messproblemen hat die Statistik zu kämpfen. Hier geht es um das Grundproblem, Phänomene durch Zahlen zu beschreiben und herauszustellen, warum manche Zahlen geeigneter sind, Aussagen über etwas zu treffen, als andere²⁰. Im Grunde genommen geht es also wieder um den indirekten Vergleich, auch wenn sich hier neue Probleme auftun: Validität, Reliabilität und Repräsentativität sind Schlagworte der empirischen Forschung. Solche Probleme beschäftigen nicht nur die Naturwissenschaften, sondern gerade auch die Human- und Sozialwissenschaften.

Nicht zu vernachlässigen ist die historische Dimension von Messproblemen. Ob es um die kühne philosophische Vermutung der Griechen „Alles ist (ganze) Zahl!“ geht oder um das historische Ringen nach Vereinheitlichung von Maßeinheiten. Oder aber die vielfältigen Bemühungen des Menschen zur Vermessung der Erde und des Weltraumes, die ganze Weltbilder ins Wanken gebracht haben und ohne die sich die heute bekannte Trigonometrie wohl kaum derart entwickelt

²⁰ Vgl. Moore 1990, S. 113.

hätte. All das hat mit Messen zu tun und sollte überaus geeignet sein, Anlass für das Sprechen über Mathematik und ihre Bedeutung in unserer Kultur zu sein.

Messen als zentrale Idee der Bruchrechnung

Bruchrechnen gilt vielen als Buch mit sieben Siegeln. Dabei fordert das Messen geradezu den Umgang mit Brüchen heraus: Wenn eine Strecke sich nicht genau mit einer Maßeinheit ausmessen lässt, was läge näher als die Maßeinheit zu unterteilen? Aber auch für die Addition von Brüchen kann unter dem Aspekt des Messens auf der Basis ikonischer Darstellungen für Verständnis geworben werden.

Will man zwei Brüche addieren, so muss man, falls die Summanden verschiedene Nenner haben, die beiden Brüche zunächst gleichnamig machen. Diese Regel ist jedem von uns bekannt, in der Schule bereitet sie dennoch nicht unerhebliche Schwierigkeiten.

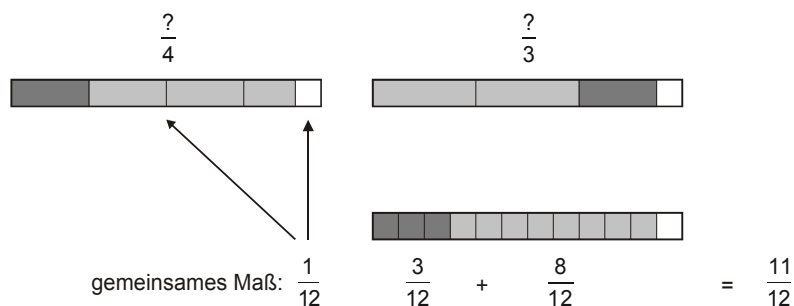
Betrachten wir daher das Problem auf der ikonischen Ebene, so stellt sich die Addition zweier Brüche als Aneinanderlegen zweier Strecken dar:



Das Problem wird hier klar: Keine der alten Unterteilungen, d.h. keiner der Nenner der Summanden, passt genau auf die entstandene Länge, d.h. die Summe muss einen anderen Nenner haben. Zwei Brüche gleichnamig machen heißt also, eine gemeinsame Unterteilung für beide Brüche finden. Es liegt ein Messproblem vor.

Orientierung an der Idee des Messens als „heuristische Strategie“ könnte jetzt auf unterschiedlichen Ebenen realisiert werden:

- Durch Übergang zu einer verfeinerten Standardmaßeinheit: Die Längen der Brüche sind auf Millimeterpapier zu übertragen. Die Gesamtlänge kann dann in Millimetern ausgedrückt werden und in Beziehung zur Länge des Ganzen gesetzt werden.
- Messen kann als indirekter Vergleich zweier Größen mittels einer Basiseinheit verstanden werden.



Diese Idee lässt uns eine geeignete Basiseinheit suchen. Durch Übereinanderlegen der ursprünglichen Raster entstehen neue Unterteilungen. Kann man mit ihnen die Einheitsstrecke und die neue Strecke gleichmäßig auslegen, so eignen sie sich als Maßeinheit.

Mit den Überlegungen steht man hier zweifelsohne noch am Anfang. Eine fundierte didaktisch orientierte Sachanalyse muss sich weiteren Fragen widmen:

- Welche Grundvorstellungen zur Addition und zum Bruchzahlverständnis sind nötig, um die oben geschilderte Illustration als wirklich produktiv empfinden zu können?
- Kann man, etwa gemäß dem operativen Prinzip, aus gut ausgesuchten Spezialfällen tatsächlich allmählich zur Einsicht in eine allgemeine Regel kommen?

Solche Fragen lassen sich im Rahmen einer Staatsarbeit kaum klären, theoretisch lassen sie sich wahrscheinlich per se nicht klären. Die Idee des Messen hilft aber an dieser Stelle, Alternativen aufzuzeigen. Sie regt dazu an, über die Inhalte neu nachzudenken.

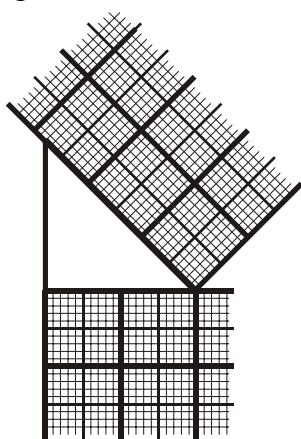
Messen ohne gemeinsames Maß?

Die Entdeckung, dass nicht alle Verhältnisse in einer ideal gedachten Geometrie durch ganze Zahlen wiedergegeben werden können, markiert die große Krise der griechischen Mathematik. Die Legende will, dass HIPPOSOS, derjenige, der diese Erkenntnis den Unwürdigen verraten hat, dem Tode geweiht war²¹.

Eine Arbeit über die fundamentale Idee des Messens kann nicht umhin, zum Problem maßfremder Streckenverhältnisse Stellung zu beziehen. Auch wenn es für den Lehrenden wohl nicht um Leben und Tod geht, die Frage bleibt: Soll man diese Erkenntnis im Unterricht vermitteln, ist sie allgemeinbildend? Ermöglicht sie eine „produktive Störung“ im Sinne konstruktivistischer Lerntheorien? Oder ist sie nur ein Kennzeichen mathematischer Esoterik, vor der schon WHITEHEAD warnte?

Inkommensurabilität ist eine Idee, die Irrationalität einer Zahl eine Eigenschaft, die sich in der Realität, durch konkrete Messungen, niemals nachweisen lässt, reine Theorie und dennoch eine zweckmäßige Erfindung: „Durch sie wird gesichert, daß für gewisse geometrische und algebraische Probleme [...] *anschaulich vorhandene Lösungen auch in der Theorie als wohlbestimmte Objekte existieren*“²².

Das Problem, dass diese Erfindung motivieren kann, ist dabei ausgesprochen einfach: Es ist die Frage nach dem Verhältnis von Seite und Diagonale im Quadrat.



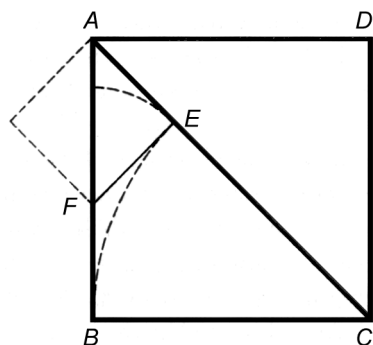
Der erste Weg, dieses Problem anzugehen, ist der konkrete Messvorgang: Auf Millimeterpapier werden Quadratseite und Diagonale möglichst genau ausgemessen. Das Verfahren als solches hat nur approximativen Charakter: Rechnerisch kann man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras nachweisen, dass gefundene Näherungen nie den tatsächlichen Wert des Verhältnisses wiedergeben. Im Bild liest man etwa für die Diagonale 28, für die Quadratseite 20 Kästchen ab, es ist $2 \cdot 20^2 = 800$, aber $28^2 = 784$.

Welche Zahlen man auch einsetzt, ob man sie rät oder durch Messen bestimmt, das echte Verhältnis findet man nie, aber schon bei relativ kleinen Zahlen überaus gute Näherungen ($5 : 7$; $2 \cdot 5^2 = 50$, $7^2 = 49$).

²¹ Vgl. Meschkowski 1990, S. 7.

²² Kirsch 1994, S. 90.

Das Ergebnis bleibt unzufriedenstellend: Ein „kunstvollere Weg“ – ein systematischeres Vorgehen – muss her. WITTENBERG stellt in seinem Klassiker „Bildung und Mathematik“ ein Verfahren vor, dass auf dem berühmten Prinzip der Wechselwegnahme von Strecken²³ basiert.



Zunächst wird die Quadratseite BC auf der Diagonalen AC abgetragen, dadurch entsteht das Reststück AE. Man errichtet jetzt eine Senkrechte zu AC im Punkt E, die AB in F schneidet.

Mit wenigen elementargeometrischen Überlegungen kommt man zu dem Schluss, dass jedes gemeinsame Maß von BC und AC auch gemeinsames Maß von AE und AF sein muss.

Mit anderen Worten: Gibt es ein gemeinsames Maß für Seitenlänge und Diagonale im großen Quadrat, so muss dies auch gemeinsames Maß im kleineren Quadrat sein.

An diesem Punkt tritt eine überaus interessante Frage auf: Was passiert, wenn man dieses Verfahren weiter fortsetzt, im kleineren Quadrat also auf dieselbe Art eine wiederum noch kleineres Quadrat konstruiert?

Man kann es sich einfach machen und eine theoretische Antwort geben: Das Verfahren bricht nicht ab. Man kann stets ein kleineres Quadrat konstruieren. Das Verhältnis von Seite zu Diagonale ist aber in jedem Quadrat gleich. Demnach gibt es kein gemeinsames Maß von Quadratseite und Diagonale, keine Bruchzahl, die das Verhältnis exakt angeben kann.

WITTENBERG schlägt einen anderen Weg vor, er plädiert für mehr „Muße“: Es ist zunächst einmal naheliegender anzunehmen, dass unser Verfahren abbricht, wir also zu einem Quadrat gelangen „das so klein ist, daß wir seine Seite und Diagonale ihrer Länge nach nicht unterscheiden, also gleichsetzen können“²⁴. Diese Vermutung ist nur vom Standpunkt des Wissenden abwegig, für die Pythagoreer war sie geradezu Glaubensbekenntnis: „Wie die Einheit bei allen Dingen gemäß dem obersten und dem einem Samenkorn ähnlichen Verhältnis am Anfang steht, so wird auch das Verhältnis von Durchmesser zur Seite in der Einheit gefunden“²⁵.

Folgt man dem Verfahren tatsächlich, geht also davon aus, dass es ein kleinstes Quadrat gibt, in dem sich Seite und Diagonale wie 1 : 1 verhalten, so erhält man eine Rekursionsformel, die beliebig gute Näherungen für das tatsächliche Verhältnis von Seite und Diagonale im Quadrat erlauben. Diese Näherungsformel ist so gut, dass bereits nach sieben Schritten ein Wert erzeugt wird, der um weniger als ein Promille vom tatsächlichen Wert abweicht²⁶. Eine Genauigkeit, die für nahezu jede erdenkliche praktische Anwendung mehr als ausreichend ist.

Diesen Punkt möchte ich für eine abschließende Reflexion über den möglichen Bildungswert des Phänomens Inkommensurabilität / Irrationalität nutzen, die noch einmal die Schwerpunktsetzung der Arbeit verdeutlichen soll.

²³ Vgl. Wittenberg 1990, S. 172ff.

²⁴ A.a.O. S. 174.

²⁵ Theon von Smyrna, zitiert nach Meschkowski 1990, S. 11.

²⁶ Wie gut das Verfahren ist, erkennt man schon daran, dass der Fehler im ersten Schritt noch fast 30% beträgt. Vgl. Vohns 2000, S. 105.

Das vorgestellte *Problem* ist ein innermathematisches. Das verwendete *Verfahren*, die Wechselwegnahme, basiert allerdings auf dem Grundprinzip nahezu jeden Messens: der Suche nach einer geeigneten Einheit, mit der ein indirekter Vergleich durchgeführt werden kann. Die *Lösung* kann man auf verschiedenen Stufen betrachten: Wie ungemein beruhigend ist es, dass die Bruchzahlen, die den Schülerinnen und Schülern seit der sechsten Klasse bekannt sind, eine Genauigkeit bereitstellen, die jede praktische Notwendigkeit bei weitem überschreitet. Will man es dann immer noch genauer wissen, so kann einem das Verfahren eine Idee liefern wie man Zahlen findet, die auch für das konsequent weitergedachte theoretische Messen ausreichen, von denen es zu jedem theoretisch denkbaren Verhältnis eine ganz genau passende Zahl gibt²⁷.

Auf der ersten Stufe arbeitet das Verfahren als „Verstärker des Alltagsdenkens“: Mittels präziserer allgemeiner Denkwerkzeuge können wir die Gewissheit gewinnen, dass man beliebig gute Näherungen für Quadratwurzeln – im Beispiel $\sqrt{2}$ – angeben kann. Für die näherungsweise Lösung quadratischer Gleichungen, die sehr wohl in echten Anwendungsproblemen auftauchen können, ist diese Gewissheit äußerst bedeutsam.

Dass auf der zweiten Stufe, für das theoretische Messen in einer ideal gedachten Geometrie, die rationalen Zahlen nicht ausreichen, ist eher ein Bruch mit dem alltäglichen Denken. Warum soll man sich Zahlen für etwas ausdenken, das es „in (der) Wirklichkeit“ gar nicht gibt?

Für WITTENBERG bestand gerade hierin der eigentliche Bildungswert des Beispiels: Mathematische Denken fördert ausgehend von zunächst einfachen, oft praktischen Fragestellungen eine eigene, eigengesetzliche Welt zu Tage, in der aus gewissen Annahmen zwingende Konsequenzen folgen, die über Fragen der praktischen Anwendbarkeit hinaus mitbedacht werden müssen.

Ob diese Erkenntnis an diesem Beispiel jederzeit und für alle Schülerinnen und Schüler zu einem bildenden Erlebnis werden kann, darüber kann man trefflich streiten. Dies war aber nicht das Ziel meiner Staatsarbeit. Wichtig für mich ist, dass man an diesem Beispiel auf der Grundlage einer didaktisch orientierten Sachanalyse, die ihrerseits auf dem Prinzip der Orientierung an fundamentalen Ideen basiert, Vorschläge für Fragestellungen machen kann, die eine Auseinandersetzung mit dem Phänomen Inkommensurabilität / Irrationalität auf unterschiedlichen Niveaus (konkretes Messen, systematisches Messen, beliebig gute Näherung, theoretischer Nachweis der Irrationalität) erlauben.

Ausblick

Und genau hierin liegt m.E. das fachdidaktische Potenzial des Prinzips der Orientierung an fundamentalen Ideen: Es ist eine stoffdidaktische Kategorie, auf deren Basis Lehrerinnen und Lehrer mathematische Inhalte durchdenken können. Jenseits einer rein materialen Anwendungsorientierung eröffnet es die Möglichkeit, sich immer wieder auf die Suche nach den den mathematischen Begriffsbildungen und Verfahren zu Grunde liegenden Kategorien des Alltagsverständnisses zu machen.

Niemand wird bestreiten, dass es ein zentrales Anliegen „guten“ Mathematikunterrichts sein muss, ein angemessenes Bild von Mathematik zu vermitteln. Fundamentale Ideen können helfen, Mathematik als Fortsetzung alltäglichen Denkens zu erleben, aber auch Brüche mit diesem aufzudecken. Beides gehört zu einem gültigen Bild von Mathematik.

²⁷ Der zugrunde liegende Algorithmus liefert einen Ansatz, der das Intervallschachtelungsaxiom motiviert. Vgl. Vohns 2000, S. 108

Alle Probleme des Mathematikunterrichts können fundamentale Ideen sicherlich nicht lösen. Unterricht ist stets ein sehr komplexer Prozess, der nicht durch eine noch so gelungene Analyse des zugrundeliegenden Stoffes allein zu klären sein wird. Kaum anzunehmen ist aber, dass er gänzlich ohne solche Analysen im oben angesprochenen Sinne erfolgreich sein wird.

Damit der Begriff der fundamentalen Idee für die Praxis interessant wird, gilt es an zahlreichen weiteren Beispielen zu erläutern, wie fundamentale Ideen in konkreten schulmathematischen Gebieten wirksam werden können. In der didaktischen Diskussion wird sich der Begriff nur halten können, wenn er von seiner frühen rein systematischen Interpretation hin zu einem Begriff einer Mathematikdidaktik als „design science“ – als angewandter Wissenschaft des Mathematikunterrichts – weiterentwickelt wird²⁸. Wenn, wie WITTMANN postuliert, die positive Einwirkung auf Mathematikunterricht, die Anwendung mathematikdidaktischer Theorien auf das Design produktiver Lernumgebungen, der eigentliche Prüfstein für ebendiese Theorien ist, so sind fundamentale Ideen immer noch eine entwicklungsbedürftige Kategorie.

Literatur

- Baireuther, P. 1990: Konkreter Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth.
- Borneleit, P./ Danckwerts, R./ Henn, H.W./ Weigand H.G. 2001: Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: JMD 22 (2001), S. 73-90.
- Bruner, J.S. 1973³: Der Prozeß der Erziehung. Berlin.
- BLK 1997: Gutachten zur Vorbereitung des Programms "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Bonn.
- Danckwerts, R. 1988: Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. In: DdM 2 (1988), S. 149-160.
- Führer, L. 1997: Pädagogik des Mathematikunterrichts. Braunschweig.
- Gallin, P./ Ruf, U. 1998: Sprache und Mathematik in der Schule. Seelze.
- Heymann, H.W. 1996: Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim.
- Kirsch, A. 1994²: Mathematik wirklich verstehen. Köln.
- Meschkowski, H. 1990: Denkweisen großer Mathematiker. Braunschweig.
- Moore, D.S. 1990: Uncertainty. In: Steen, L.A. (ed.) 1990: On the Shoulders of Giants – New Approaches to Numeracy. Washington.
- Neubrand, M. u.a. 2001: Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzhebung. In: ZDM (Apr 2001) v. 33(2), S. 45-59.
- Schreiber, A. 1979: Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. In: math. did. 2 (1979), S.165- 171.
- Schweiger, F. 1992: Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: JMD 13 (1992), S.199 - 214.
- Tietze, U.P./ Klika, M./ Wolpers, H. 1982: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Braunschweig.
- Vohns, A. 2000: Das Messen als fundamentale Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Siegen/ Internet (<http://www.math.uni-siegen.de/didaktik/downl/messen.pdf>).
- Vollrath, H.-J. 1978: Rettet die Ideen! In: MNU 31/8 (1978), S. 449-455.
- vom Hofe, R. 1992: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. In: JMD 13/4 (1992).
- Whitehead, A. N. 1962: Die Gegenstände des mathematischen Unterrichts. In: Neue Sammlung 2/3 1962, S. 257-266.
- Winter, H. 1996: Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: GDM-Mitteilungen Nr. 61 (1996), S. 37-46
- Wittenberg, A.I. 1990: Bildung und Mathematik. Stuttgart.
- Wittmann, E.Ch. 1981⁶: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig.
- Wittmann, E. Ch. 1992: Mathematikdidaktik als ‚design science‘. In: JMD 13 (1992), S. 55-70.

²⁸ Vgl. Wittmann 1992