Matematikai bizonyítások számítógépek segítségével

Garab Ábel

A matematikai számítások megkönnyítésére használt gépek nagyjából egyidősek a matematikával: már az ókori Rómában használtak abacust (és más területeken annak változatait), a XIV–XVII. század környékén népszerűvé váló szorobán pedig még napjainkban is jelentős szerepet tölt be egyes általános iskolák matematikaoktatásában.

A technika fejlődése ma már olyan számításokat tesz lehetővé a másodperc törtrésze alatt egy zsebünkben elférő eszköz segítségével, amik elvégzése néhány évtizeddel ezelőtt órákig vagy napokig tartott volna. A matematikai tételek felfedezésében és bizonyításában új távlatokat nyitott a számítógépek elterjedése. A Mersenne-prímek (vagyis az olyan $2^n - 1$ alakú prímek, ahol n szintén prímszám) keresése például 1997 óta egy számítógép-hálózat segítségével történik, amelyhez bárki önkéntesen csatlakoztathatja a saját számítógépét. Az eddigi legnagyobb ismert Mersenne-prím a $2^{57885161} - 1$, amely több mint 17 millió számjegyből áll. Bár elméleti akadálya nincs, természetesen senkinek nem jut eszébe „kézzel" leellenőrizni, hogy ez a szám valóban prím-e.

Az első igazán nagy jelentőségű olyan matematikai tétel, amelynek bizonyításában a számítógépnek nélkülözhetetlen szerep jutott az úgynevezett négyszín-tétel, amelyet 1976-ban bizonyítottak be [1,2]. Eszerint a sík egy összefüggő részét tetszőlegesen régiókra osztva ki lehet úgy színezni legfeljebb négy szín felhasználásával, hogy semelyik két szomszédos régió ne legyen azonos színű, tehát például egy ország megyéinek térképe kiszínezhető négy színnel.

Az alkalmazott matematikában az időben dinamikusan változó, bizonyos törvényszerűségeknek engedelmeskedő folyamatok modellezésére az egyik legelterjedtebb módszer a differenciálegyenletek és differenciaegyenletek elmélete. Ezek numerikus szimulálására szoftverek egész tárháza áll rendelkezésre, amelyek segítségével könnyen alkothatunk sejtéseket a modellre vonatkozóan. Az ilyen kalkulációk során a számítógép szükségszerűen kerekítéseket végez, amelyek nagyban befolyásolhatják a kapott eredményeket, ezért az így észlelt jelenségek nem tekinthetők matematikai szigorral bizonyítottnak. Ennek a problémának a kiküszöbölésére született meg – többek között – az intervallumaritmetika módszere, melynek lényege abban rejlik, hogy a gép a számokat nem fel- vagy lekerekíti egy általa reprezentálható számhoz, hanem egyszerre „mindkét irányba" kerekít, vagyis a kalkuláció során felmerülő összes számértéket egy-egy intervallummal reprezentálja, amely a tényleges értéket minden esetben magába foglalja. Az így kapott eredmények már tekinthetők matematikai szigorral vett tényeknek. Ebben a témakörben az egyik leghíresebb eredmény az időjárás modellezésére megalkotott Lorenz-egyenlet kaotikus viselkedésének bizonyítása [6,7]. Többek között ezzel magyarázható az a megfigyelés, hogy pontos meteorológiai előrejelzéseket legfeljebb néhány napra lehet készíteni.

Krisztin Tiborral és Bartha Ferenccel közös munkáinkban populációdinamikai rendszerek hosszú távú viselkedését vizsgáltuk [3,4]. Egy 1976-os sejtés szerint a bálnapopulációk méretének modellezésére felállított Ricker-féle egyenlet viselkedésére az jellemző, hogy – bizonyos körülmények között – az idő múlásával az egyedszám egy konstans, optimális egyedszámot fog megközelíteni [5]. Teoretikus matematikai eszközök, valamint számítógépes módszerek, köztük intervallumaritmetika segítségével beláttuk a sejtés helyességét. Az állítás bizonyítása három fő lépésből áll. Először analitikus eszközökkel megadunk egy ε küszöbértéket, amelyről belátjuk, hogy ha a populáció kezdeti mérete ennél kisebb mértékben tér el az optimumtól, akkor az egyedszám tartani fog az optimumhoz. Megmutatjuk továbbá, hogy elegendő egy bizonyos méret alatti populációkkal foglalkozni, mert az annál nagyobbak hosszú távú viselkedése ezekével megegyező. Ezek után intervallumaritmetika és más számítógépes módszerek segítségével bebizonyítjuk, hogy bármekkora – a fenti korlát alatt lévő – kezdeti populáció esetén az egyedszám előbb-utóbb az optimumtól legfeljebb ε mértékben fog eltérni. Mivel abban a mérettartományban már beláttuk az optimumhoz való tartást, így ezzel a sejtés bizonyítást nyert.

[1] K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I: Discharging, *Illinois J. Math.* **21** (1977), 429–490.

[2] K. Appel, W. Haken, J. Koch, Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility, *Illinois J. Math.* **21** (1977), 491–567.

[3] F. A. Bartha, Á. Garab, Necessary and sufficient condition for the global stability of a delayed discrete-time single neuron model. *J. Comput. Dyn.*, elfogadva.

[4] F. A. Bartha, Á. Garab, T. Krisztin, Local stability implies global stability for the 2-dimensional Ricker map. *J. Difference Equ. Appl.* **19** (2013), 2043–2078.

[5] S. A. Levin, R. M. May, A note on difference-delay equations, *Theoret. Popul. Biol.* **9** (1976), 178–187.

[6] K. Mischaikow, M. Mrozek, Chaos in the Lorenz equations: A computer-assisted proof, *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)* **32** (1995), 66–72.

[7] W. Tucker, A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem, *Found. Comput. Math.* **2** (2002), 53–117.